

Analyse M1 2022-2023

Alain JOYE

- Rappels EDO
- Points de phase, équilibre, linéarisation
- Stabilité selon Lyapunov, flot hamiltonien
- EDP, nomenclature, classification, exemples
- Solution de l'éq. de transport, formule de d'Alembert pour les ondes 1D.
- Principe du maximum pour Laplace et op. elliptiques, unicité
- Thm. de la divergence, propriétés de la moyenne et conséquences pour Laplace
- Poisson: solution fondamentale / fonction de Green, solution forcée dans \mathbb{R}^d .
- Rappels sur L^p , convolution, dualité, L^p
- Séries de Fourier sur le cercle, même L^1 , L^2 .
- Espace de Schwartz, transf. de Fourier dans Schwartz et L^2
- Eq. de la chaleur dans Schwartz, existence et unicité.
- Lax-Nirenberg abstrait, dérivée faibles, espace $H^1(\mathbb{R}^d)$ et propriétés.
- Formulation variationnelle d'EDP elliptiques, existence et unicité de sol. faibles dans H^1
- Solutions faibles de l'éq. du transport.

Quelques références :

Benzoni "Calcul différentiel et équations différentielles"

Evans "Partial differential equations"

Stein Shakarchi, "Fourier analysis, an introduction"

Pinsky, "Introduction to Fourier analysis and wavelets"

Lieb & Loss, "Analysis"

Brezis "Analyse fonctionnelle, théorie et applications".



Rappels (liés du cours de Calcul diff. de L3 de Th. Gallay).

Déf: Soit U un ouvert (non vide) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on dit qu'une fonction différentiable $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est solution de l'équation différentielle

$$\gamma' = f(t, \gamma), \quad (t, \gamma) \in U \quad (1)$$

- si i) on a $(t, \gamma(t)) \in U \quad \forall t \in I$;
ii) on a $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I$.

Problème de Cauchy associé à l'EDO (1): étant donné $(t_0, \gamma_0) \in U$, (15)
Essayer une solution $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (1) définie sur un intervalle de temps t.q. $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ et vérifiant $\gamma(t_0) = \gamma_0$.

Equation intégrale associée:

Lemme: Une fonction $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est solution du problème de Cauchy pour l'éq. (1) avec données initiales $(t_0, \gamma_0) \in U$, $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ ssi:

- i) γ est continue et $(t, \gamma(t)) \in U \quad \forall t \in I$;
ii)
$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \quad \forall t \in I. \quad (2)$$

Proposition: (Lemme de Gronwall)

Soient $\alpha, b, f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues. On suppose

que
$$f(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t b(s) f(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (4)$$

Alors
$$f(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t e^{B(t)-B(s)} \alpha(s) b(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (5)$$

où B est une primitive de b .

"Le" théorème d'existence et unicité.

Proposition (théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à y . Alors pour tout point $(t_0, y_0) \in U$, il existe un temps $T_0 > 0$ tel que l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U \quad (1)$$

possède une solution unique $\gamma: [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.q. $\gamma(t_0) = y_0$.

4) Prolongement des solutions:

Définitions:

- Si $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux solutions de l'EDO (1), on dit que γ_2 prolonge γ_1 si $I_2 \supset I_1$ et $\gamma_2(x) = \gamma_1(x) \forall x \in I_1$.
- On dit qu'une solution $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de l'EDO (1) est maximale si elle n'admet pas de prolongement non trivial: si $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ prolonge γ , alors $\tilde{I} = I$.

Proposition: Sous les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de l'EDO (1) t.q. $\gamma(t_0) = y_0$.

En outre:

- l'intervalle maximal d'existence I est ouvert;
- la solution maximale γ sort de tout compact en temps fini: si $K \subset U$ est compact, $\exists t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_0 < t_2$ t.q. $(t_1, \gamma(t_1)) \notin K$ et $(t_2, \gamma(t_2)) \notin K$.

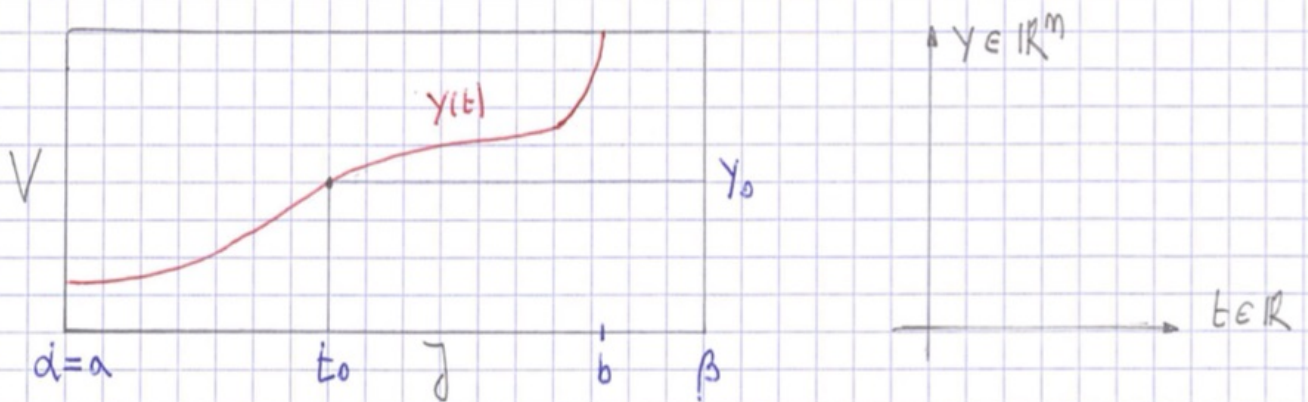
Si $U =] \times V$, \tilde{m} $]$ intervalle ouvert de \mathbb{R} et V ouvert de \mathbb{R}^n , on a une version plus fine:

Cas où $U = J \times V$ ("théorème des bords")

Soit $J =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, et $y: I \rightarrow V$ la solution maximale de l'EDO (1) pour la donnée initiale $y(t_0) = y_0$, où $t_0 \in J$, $y_0 \in V$. On note $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < t_0 < b \leq +\infty$.

Alors:

- i) Soit la solution y est globale "pour les temps positifs": $b = \beta$, soit y "explose en temps fini": on a $b < \beta$, et $y(t)$ sort de tout compact de V lorsque $t \rightarrow b$ pour $t > t_0$.
- ii) De même, soit la solution y est "globale pour les temps négatifs": $a = \alpha$, soit y "explose en temps fini": on a $a > \alpha$, et $y(t)$ sort de tout compact de V lorsque $t \rightarrow a$ pour $t < t_0$.



Dans cet exemple, la solution $y(t)$ est globale pour les temps négatifs, mais explose en temps fini pour $t > t_0$: $b < \beta$.

Rem: C'est ce qui se passe pour la solution de l'éq. de Riccati:

$$y' = y^2 \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0 > 0$$

$$\text{donnée par} \quad y(t) = \frac{y_0}{1 - t y_0} \quad \text{pour} \quad t \in I_* :=]-\infty, 1/y_0[.$$

Prop: On suppose que $U = J \times \mathbb{R}^m$, et que $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifie les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz. Si en outre:

- f est uniformément bornée sur U , ou
 - f est globalement lipschitzienne par rapport à y ,
- alors toutes les solutions de l'EDO (1) sont globales.

S'applique en particulier au cas linéaire.

Dépendance en les conditions initiales:

Notations: Etant donné $(t_0, y_0) \in U$, on note

$$\| y(t; t_0, y_0), t \in I(t_0, y_0) \subset \mathbb{R}$$

la solution maximale de l'EDO (1) avec donnée initiale (t_0, y_0) .
 $I(t_0, y_0)$ (intervalle ouvert contenant t_0) est l'intervalle maximal sur lequel la solution issue de t_0 existe.

Proposition: Soit $(t_0, y_0) \in U$ et $J = [T_1, T_2] \subset I(t_0, y_0)$. Alors il existe des constantes $\tau_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ et $C > 0$ telles que, si $(t_1, y_1) \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \times \bar{B}(y_0, \tau_0)$, alors $I(t_1, y_1) \supset J$ et

$$\sup_{t \in J} \| y(t; t_0, y_0) - y(t; t_1, y_1) \| \leq C (|t_0 - t_1| + \|y_0 - y_1\|). \quad (*)$$

Régularité du flot (résultat admis)

Proposition: Si $f \in C^k(U)$, alors $\forall (t_0, y_0) \in U$ et $\forall t \in I(t_0, y_0)$ l'application $(t_1, y_1) \mapsto y(t; t_1, y_1)$ est de classe C^k sur un voisinage ouvert de (t_0, y_0) .

Dans la même veine: à t_0 fixé, $\varphi^{t_0}: (t, y_1) \mapsto y(t; t_0, y_1)$ est de classe C^k pour (t, y_1) au voisinage de (t_0, y_0) , si $f \in C^k(U)$.

b) Système différentiel du premier ordre

On considère à présent le système différentiel général

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \quad (5)$$

où $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $b: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions continues.
Le système homogène associé à (5) est:

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad t \in I. \quad (6)$$

Dans les deux cas, on s'intéresse aux solutions maximales (forcément globales) $y: I \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Déf: Si $t_0 \in I$, notons $y_1, \dots, y_m: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ les solutions (forcément uniques) de (6) telles que

$$y_i'(t) = A(t)y_i(t), \quad t \in I, \quad \text{et} \quad \underline{y_i(t_0) = e_i} \quad (i=1, \dots, m)$$

où e_1, \dots, e_m désigne la base canonique de \mathbb{R}^m .

En écrivant $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ comme des vecteurs colonnes, on définit la résolvante du système homogène (6):

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) & \dots & Y_m(t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

(Les colonnes de $R(t, t_0)$ sont les vecteurs $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$.)

Proposition: (Propriétés de la résolvante)

i) $R: I \times I \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ est de classe C^1 , et

$$\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \quad \frac{d}{dt_0} R(t, t_0) = -R(t, t_0)A(t_0).$$

ii) $R(t_0, t_0) = \mathbb{1}$, $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \in I$

iii) $R(t, t_0) \in GL_m(\mathbb{R})$ et $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t) \quad \forall t_0, t_1 \in I$

iv) $\det R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds\right)$

v) Pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^m$, l'unique solution de (6) vérifiant $Y(t_0) = Y_0$ est $Y(t) = R(t, t_0)Y_0$.

Conséquence: Pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^m$, l'unique solution de (5) vérifiant $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par:

$$Y(t) = R(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) ds, \quad t \in I. \quad (8)$$

La démonstration se fait par calcul direct, comme au paragraphe précédent. On en déduit en particulier que:

- les solutions maximales de (6) forment un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^m)$ de dimension m ;
- les solutions maximales de (5) forment un sous-espace affine de $C^1(I, \mathbb{R}^m)$ de dimension m .

1) L'exponentielle $\exp(tA)$ peut en principe se calculer en mettant la matrice A sous forme réduite de Jordan:

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{k_e}(\lambda_e)} \end{pmatrix} P, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_e = m$$

où $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$: bloc de Jordan de taille k pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a :

$$\exp \left\{ t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \right\} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_e(\mathbb{C})$$

(calcul direct à partir de la définition de l'exponentielle en remarquant que $J_k(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_{k \times k} + N_k$, N_k nilpotent.)

3) Soient $y_1(t), \dots, y_m(t)$ m solutions de l'éq. homogène (6). On appelle déterminant de Wronski (ou Wronskien) de y_1, \dots, y_m la fonction

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} | & y_1(t) & | & y_2(t) & | & \dots & | & y_m(t) & | \\ \hline \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

Alors le même calcul que ci-dessus montre que

$$W'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t) \Rightarrow W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds\right) W(t_0).$$

Chapitre VII : Equations différentielles autonomes

135)

Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert (non vide) et $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle autonome

$$y' = f(y), \quad y \in V. \quad (1)$$

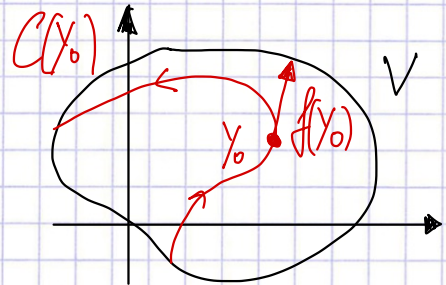
Etant donné $y_0 \in V$, on note $y(t; y_0) = \varphi_t(y_0)$ l'unique solution maximale de (1) vérifiant $y(0) = y_0$. (dans le cas autonome, on peut toujours supposer que $t_0 = 0$). Celle-ci est définie pour $t \in I(y_0)$, où $I(y_0) \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

1) Définitions générales

Déf. On appelle courbes intégrales ou trajectoires du système (1) les courbes dans V définies par

$$E(y_0) = \{ \varphi_t(y_0) \mid t \in I(y_0) \} \subset V$$

pour tous les $y_0 \in V$.



⚠ les courbes intégrales sont les images des solutions de (1), non les solutions elles-mêmes!

Il résulte du thm de Cauchy-Lipschitz et de la proposition sur le prolongement des solutions que, si $y_0, y_1 \in V$, alors

$$\text{soit } E(y_0) = E(y_1), \text{ soit } E(y_0) \cap E(y_1) = \emptyset.$$

Les courbes intégrales forment donc une partition de V . L'analyse qualitative des équations différentielles, initiée par H. Poincaré à la fin du 19^{ème} siècle, a pour objet de "dresser le portrait de phase" d'un

système autonome tel que (1), c'est-à-dire étudier la partition (136) de "l'espace de phase V " formée par les courbes intégrales (sans chercher à déterminer les solutions explicitement). La difficulté d'une telle analyse augmente rapidement lorsque la dimension n croît!

Déf: On dit que $y_0 \in V$ est un point d'équilibre de l'équation (1) si $f(y_0) = 0$.

Si y_0 est un point d'équilibre, alors $I(y_0) = \mathbb{R}$ et $\varphi_t(y_0) = y_0 \forall t \in \mathbb{R}$. Ainsi $E(y_0) = \{y_0\}$. Si au contraire $f(y_0) \neq 0$, alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit la courbe intégrale locale

$$E_\varepsilon(y_0) = \{ \varphi_t(y_0) \mid t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$$

est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension 1, contenue dans V , et tangente au vecteur $f(y_0)$ au point y_0 , car

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(y_0) \Big|_{t=0} = f(y_0) \text{ par définition.}$$

A l'exception des points d'équilibre, toutes les courbes intégrales de l'EDO (1) sont donc tangentes au "champ de vecteurs" f en tous les points de V .

2) Propriétés du flot

(137)

Notons $\Omega = \{ (t, y) \in \mathbb{R} \times V \mid t \in I(y) \}$.

Déf: On appelle flot de l'équation autonome (1) l'application

$$\varphi : \Omega \longrightarrow V$$
$$(t, y_0) \longmapsto \varphi_t(y_0) \quad (= \text{solution au temps } t \text{ avec donnée initiale } y_0).$$

On a par construction les propriétés suivantes:

i) Propriété de groupe: Si $t_1 + t_2 \in I(y_0)$ et $t_1 \in I(y_0)$, alors $t_2 \in I(\varphi_{t_1}(y_0))$ et on a:

$$\varphi_{t_1+t_2}(y_0) = \varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(y_0)).$$

ii) Injectivité: Si $t \in I(y_0) \cap I(y_1)$, alors

$$\varphi_t(y_0) = \varphi_t(y_1) \Rightarrow y_0 = y_1.$$

(Conséquences directes de l'unicité de la solution du problème de Cauchy.)

iii) Difféomorphisme local:

Proposition: Soit $y_0 \in V$ et $T \in I(y_0)$. Alors il existe un voisinage ouvert W de y_0 dans V tel que $T \in I(y) \forall y \in W$ et l'application $\varphi_T: W \rightarrow \varphi_T(W)$ est un difféomorphisme de classe C^k . En outre:

$$\det(\mathcal{J}_{\varphi_T}(y)) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} f(\varphi_t(y)) dt\right), \quad \forall y \in W. \quad (3)$$

$$\bar{a} \quad \mathcal{J}_{\varphi_T}(y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1}(\varphi_{T,1}) & \dots & \partial_{y_n}(\varphi_{T,1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1}(\varphi_{T,m}) & \dots & \partial_{y_n}(\varphi_{T,m}) \end{pmatrix}(y) = \begin{pmatrix} \nabla(\varphi_{T,1}) \\ \vdots \\ \nabla(\varphi_{T,m}) \end{pmatrix}(y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \varphi_T & \dots & \partial_{y_n} \varphi_T \end{pmatrix}(y) \quad \text{car} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{J}_{\varphi_T}(y) = d f_{\varphi_T}(\mathcal{J}_{\varphi_T}(y)).$$

Déf: On dit que le champ de vecteurs $f \in C^k(V, \mathbb{R}^m)$ est complet si toutes les solutions maximales de l'EDO (1) sont globales, c'est-à-dire que $I(y_0) = \mathbb{R} \forall y_0 \in V$.

Dans ce cas, $\Omega = \mathbb{R} \times V$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ l'application $\varphi_t: V \rightarrow V$ est un difféomorphisme de classe C^k . En outre, on a

$$\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Critère de complétude :

Théorème IV.1 Supposons que pour tout intervalle ouvert borné J , toute solution $u \in C^1(J; V)$ de

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

soit à valeurs dans un compact K_J de V . Alors le champ f est complet.

Remarque: K_J dépend également de la condition initiale de la solution.

S'applique typiquement lorsque l'on a des estimations a priori sur la solution.

Remarque sur le choix de temps initial: Pour un champ de vecteurs autonome $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$,

où $\gamma(t) := \varphi_t(\gamma_0)$ satisfait $\gamma' = f(\gamma)$, $\gamma(0) = \gamma_0$, $\forall t \in I(\gamma_0)$ où $0 \in I(\gamma_0)$,

alors, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t - t_0) = \varphi_{t-t_0}(\gamma_0)$ satisfait

$$\tilde{\gamma}' = f(\tilde{\gamma}), \quad \tilde{\gamma}(t_0) = \gamma_0, \quad \forall t \in t_0 + I(\gamma_0),$$

car $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t - t_0) = f(\gamma(t - t_0)) = f(\tilde{\gamma}(t))$, où $t - t_0 \in I(\gamma_0)$.

3) Redressement local du flot

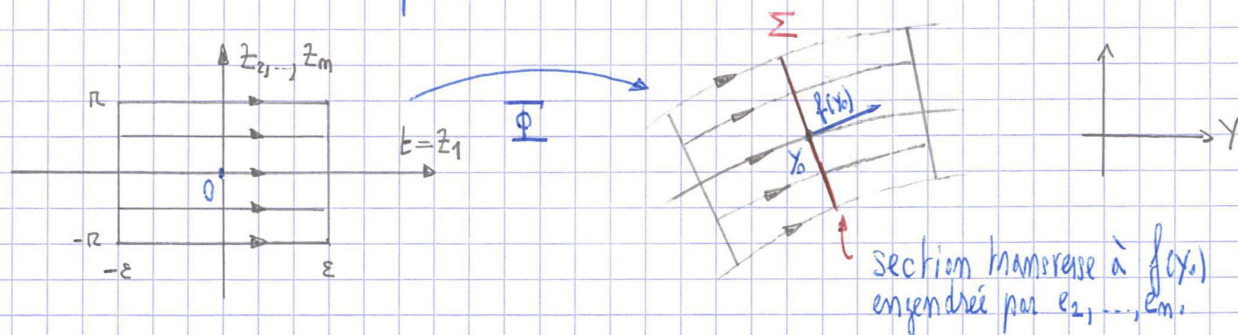
On étudie ici le flot de l'EDO (1) au voisinage d'un point $y_0 \in V$ où $f(y_0) \neq 0$. Soient $e_2, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$ des vecteurs tels que

$(f(y_0), e_2, e_3, \dots, e_m)$ soit une base de \mathbb{R}^m .

Pour $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ assez petits, on considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times B_{\mathbb{R}^{m-1}}(0, \rho) &\longrightarrow V \\ (t, z) &\longmapsto \varphi_t(y_0 + \sum_{i=2}^m z_i e_i). \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ sont assez petits.



Appliquons à l'EDO (1), au voisinage de y_0 , le changement de variables $y = \Phi(z)$, où Φ est défini ci-dessus. Alors

$$d\Phi(z) z' = y' = f(y) = f(\Phi(z)), \text{ donc}$$

$$z' = g(z) := d\Phi(z)^{-1} f(\Phi(z)), \quad z \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times B_{\mathbb{R}^{m-1}}(0, \rho).$$

$$\text{Ainsi } (z'_1, z'_2, \dots, z'_m) = (1, 0, \dots, 0). \quad (*)$$

On dit que le changement de variables Φ "redresse le flot" localement au voisinage de y_0 , en le mettant sous la forme canonique (*) où les courbes intégrales sont des droites parallèles.

Rém. l'argument fait appel à $J_{\varphi_t}(y) = R_t(f, 0)$ pour l'EDO. $J_{\varphi_t}(y) = df(\varphi_t(y)) J_{\varphi_t}(y)$; $J_{\varphi_0}(y) = \mathbb{1}$.

Déf: On dit qu'une fonction $H: V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une intégrale première de l'EDO (1) si $dH(y) f(y) = 0 \quad \forall y \in V$.

Si H est une intégrale première et si $y(t)$ est une solution quelconque de (1), alors $\frac{d}{dt} H(y(t)) = dH(y(t)) y'(t) = dH(y(t)) f(y(t)) = 0, \quad \forall t \in I$

ce qui montre que $H(y(t))$ est constant le long de chaque trajectoire.

Chaque courbe intégrale de (1) est donc incluse dans un ensemble de niveau de H . On dit aussi que H est une quantité conservée sous l'évolution définie par (1).

Corollaire: Au voisinage de chaque point $y_0 \in V$ où $f(y_0) \neq 0$, l'EDO (1) possède $n-1$ quantités conservées: les fonctions $z_1(y), \dots, z_{n-1}(y)$ définies ci-dessus. Ces intégrales premières sont indépendantes, dans la mesure où leurs différentielles dz_1, \dots, dz_{n-1} sont linéairement indépendantes en tout point (d'un voisinage de y_0).

Moralité: Le comportement local des solutions d'une équation différentielle de la forme (1) est trivial, sauf (éventuellement) au voisinage des points d'équilibre.

Exple: $x'' = -\frac{d}{dx} V(x) \quad \text{a} \quad V \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \quad t \mapsto x(t) \in C^1(I, \mathbb{R}), \quad I \subset \mathbb{R}.$

o) système du 1^{er} ordre: $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \quad \text{b) } Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\frac{d}{dx} V(x(t)) \end{pmatrix} := f(Y(t)).$

Avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $f(Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{d}{dx} V(y_1) \end{pmatrix}$, a a le système équivalent $Y' = f(Y).$

Energie mécanique: $E(t) = \frac{1}{2} x'(t)^2 + V(x(t)) \quad \text{b) } E'(t) = 2x'(t)x''(t) + \frac{d}{dx} V(x(t))x'(t) = 0. \quad \forall t \in I.$

L'intégrale première correspondante est $H(Y) = \frac{1}{2} y_2^2 + V(y_1), \quad -\frac{d}{dx} V(y_1)$

b) $dH(Y) = \left(\frac{d}{dx} V(y_1) \quad y_2 \right)$ et $dH(Y) f(Y) = \left(\frac{d}{dx} V(y_1) \quad y_2 \right) \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{d}{dx} V(y_1) \end{pmatrix} = 0, \quad \forall Y.$

4) Points d'équilibre, équation linéarisée, exemples

141

On suppose à présent que $y_0 \in V$ est un point d'équilibre de l'EDO (1): $f(y_0) = 0$. On cherche à étudier les courbes intégrales de (1) au voisinage de ce point.

Déf: On appelle équation linéarisée au point d'équilibre $y_0 \in V$ l'équation linéaire

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (5)$$

où $A = J_f(y_0) \in M_m(\mathbb{R})$. ($\equiv df(y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(y_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(y_0) \end{pmatrix}$)

Heuristique: cherchons des solutions de (1) sous la forme $y' = f(y)$

$y(t) = y_0 + \varepsilon x(t)$, où $|\varepsilon| \ll 1$. On a :

$$\varepsilon x'(t) = y'(t) = f(y_0 + \varepsilon x(t)) = f(y_0) + \varepsilon df(y_0)x(t) + o(\varepsilon),$$

$\Rightarrow x'(t) = df(y_0)x(t) + o(1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. D'où (5).

Rem: Le théorème de régularité du flot (admis) montre que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$d\varphi_t(y_0) = J_{\varphi_t}(y_0) = \exp(tA). \quad \left(J_{\varphi_t}(y_0) = df_{y_0}(J_{\varphi_t}(y_0)); \varphi_t(y_0) = y_0 \right)$$

"Le linéarisé du flot est le flot de l'équation linéarisée."

Par construction, l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre de l'équation linéarisée (5). Dresser le portrait de phase de ce système simplifié est un exercice très instructif, qui montre la richesse des configurations possibles. Le pt d'équilibre $x=0$ est isolé ssi $\det(A) \neq 0$.

Exemple: $m = 2$, $A \in M_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les valeurs propres (complexes) de A . On distingue plusieurs cas, suivant que λ_1, λ_2 sont réelles ou non, et que A est diagonalisable ou non.

a) A est diagonalisable, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

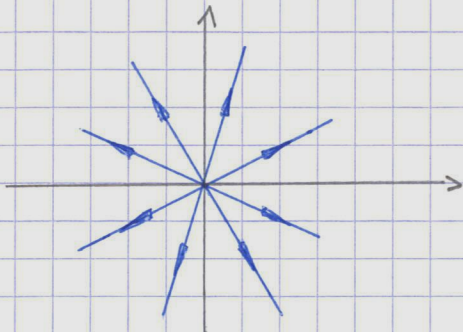
Cas "génériques" seulement ⁽¹⁴²⁾

Si V_1, V_2 désigne les vecteurs propres de A (relatifs à λ_1, λ_2 respectivement) les solutions de (5) sont de la forme:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: noeud propre instable

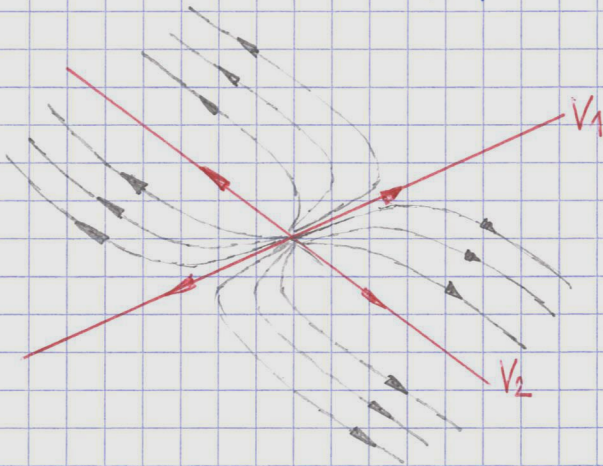
On se concentre sur les cas non dégénérés où $\det A \neq 0$.



• $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: noeud propre stable (inverse les flèches)

Rem: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = 0$: cas trivial (que des pts d'équilibre).

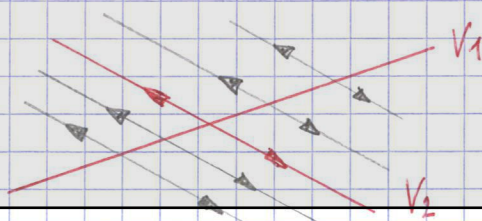
• $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: noeud impropre instable



• $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: noeud impropre stable (inverse les flèches)

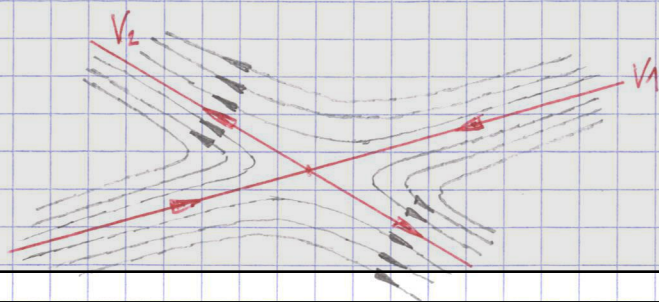
Rem: $0 = \lambda_1 < \lambda_2$: cas dégénéré

Idem si $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$ (inverse les flèches).



• $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: col (ou point selle)

143)



b) A n'est pas diagonalisable ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

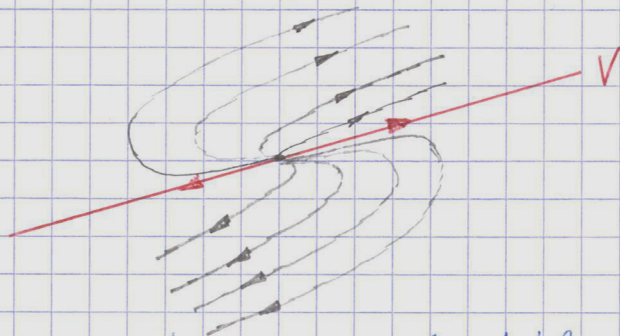
Il existe alors des vecteurs $V, W \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(A - \lambda)V = 0, \quad (A - \lambda)W = V.$$

Les solutions de (5) sont de la forme

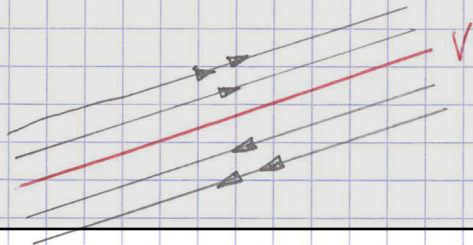
$$X(t) = e^{\lambda t} \{ (c_1 + c_2 t)V + c_2 W \}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• $\lambda > 0$: noeud exceptionnel instable



• $\lambda < 0$: noeud exceptionnel stable (idem, inverser les flèches)

Rem: $\lambda = 0$: cas dégénéré (ligne de points d'équilibre)



c) les valeurs propres de A sont complexes conjuguées

On a $\lambda_1 = \mu + i\omega$, $\lambda_2 = \mu - i\omega$ avec $\omega \neq 0$. Il existe des vecteurs $V, W \in \mathbb{R}^2$ t.q.

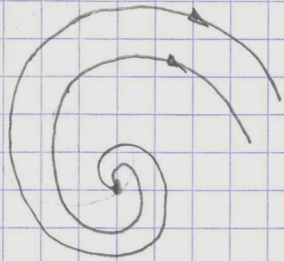
$$(A - \mu)V = -\omega W, \quad (A - \mu)W = \omega V.$$

les solutions de (5) sont de la forme :

144)

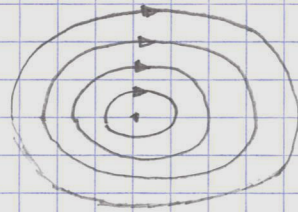
$$X(t) = c e^{\mu t} (\cos(\omega t + \vartheta) V + \sin(\omega t + \vartheta) W), \quad c, \vartheta \in \mathbb{R}.$$

• $\mu > 0$: spirale instable



• $\mu < 0$: spirale stable (idem, inverse les flèches)

• $\mu = 0$: centre



(10 cas en tout + 4 situations dégénérées où $x=0$ n'est pas un pt d'équil. isolé.)

5) Stabilité des points d'équilibre

La notion la plus importante intervenant dans l'étude des points d'équilibre du système (1) est celle de stabilité (vis-à-vis de petites perturbations). Elle suppose le choix d'une direction temporelle privilégiée (on s'intéresse à l'évolution du système pour les temps futurs, plutôt que les temps passés). Les définitions ci-dessus ont été introduites par Alexandre Lyapunov (vers 1892).

Déf: Soit y_0 un point d'équilibre de l'EDO (1). On dit que y_0 est

- i) Stable (au sens de Lyapunov) si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que, pour tout $y \in V$ tel que $\|y - y_0\| \leq \eta$, on ait que $I(y) = [0, +\infty[$ et $\|q_t(y) - y_0\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$.
- ii) Asymptotiquement stable si, de plus, on a

$$\| \varphi_t(y) - y_0 \| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \forall y \text{ t.q. } \|y - y_0\| \text{ est suffisamment petit.} \quad (145)$$

iii) Instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Exemple: On considère l'équation linéaire

$$X' = AX, \quad \text{où } A \in M_n(\mathbb{R}). \quad (5)$$

On sait que $X(t) = \exp(tA) X(0) \quad \forall t \geq 0$. En calculant l'exponentielle de matrice par réduction à la forme de Jordan, on trouve que

$$C_1 e^{\mu t} (1+t)^{N-1} \leq \| \exp(tA) \| \leq C_2 e^{\mu t} (1+t)^{N-1} \quad \forall t \geq 0 \quad (*)$$

où C_1, C_2 sont des constantes positives et :

- $\mu = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \text{ valeur propre (complexe) de } A \}$
- $N =$ taille du plus grand bloc de Jordan correspondant à une valeur propre λ telle que $\operatorname{Re} \lambda = \mu$.

Corollaire:

- l'origine $X = 0$ est un point fixe stable de l'EDO linéaire (5) ssi $\mu \leq 0$ et $N=1$ si $\mu = 0$.

(Toutes les valeurs propres complexes de A doivent se trouver dans le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, et celles qui se trouvent sur l'axe imaginaire $\operatorname{Re} \lambda = 0$ doivent être simples ou semi-simples [tous les blocs de Jordan sont de taille 1].)

- l'origine $X = 0$ est asymptotiquement stable ssi $\mu < 0$.

(Dans ce cas, toutes les solutions convergent exponentiellement vite vers l'origine lorsque $t \rightarrow +\infty$.)

L'étude des systèmes linéaires se réduisant ainsi à une simple analyse spectrale, on souhaite à présent relier les propriétés de stabilité d'un pt d'équilibre de l'EDO (1) à celles du système linéarisé.

Soit donc y_0 un point d'équilibre de (1) et $A = J_f(y_0) = df(y_0)$ (146)

Proposition: (théorème de stabilité de Lyapunov) (Lyapunov n°3 Benjoni)

- Si toutes les valeurs propres (complexes) de A vérifient $\operatorname{Re} \lambda < 0$, alors y_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de l'EDO (1).
- Si A possède une valeur propre telle que $\operatorname{Re} \lambda > 0$, alors y_0 est un point d'équilibre instable de l'EDO (1).

Ce résultat fondamental permet donc de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre $y_0 \in V$, sauf dans le cas où les valeurs propres de A de partie réelle maximale se trouvent sur l'axe imaginaire.

Dém:

- Comme le flot φ_t est de classe C^1 au moins, la formule de Taylor à l'ordre 1 donne:

$$\begin{aligned}\varphi_t(y_0 + x) &= \varphi_t(y_0) + d\varphi_t(y_0)x + \|x\| \varepsilon_t(x) \\ &= y_0 + \exp(tA)x + \|x\| \varepsilon_t(x), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Si toutes les valeurs propres de A vérifient $\operatorname{Re} \lambda < 0$, on a vu que $\|\exp(tA)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. On peut donc choisir $T > 0$ assez grand pour que $\|\exp(TA)\| \leq 1/2$. La formule ci-dessus montre alors:

$$\|\varphi_T(y_0 + x) - y_0\| \leq \|\exp(TA)\| \|x\| + \|x\| |\varepsilon_T(x)| \leq \frac{3}{4} \|x\|$$

si $\|x\| \leq r$ (suff. petit). En itérant cette estimation, on trouve: (propriété de groupe!)

$$\|\varphi_{mT}(y_0 + x) - y_0\| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^m \|x\| \quad \forall m \in \mathbb{N}, \text{ si } \|x\| \leq r. \quad (2)$$

Enfin, le théorème de continuité lipschitz du flot affirme que, quitte à restreindre encore $r > 0$, il existe une constante $K \geq 1$ t.q.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi_t(y_0 + x) - y_0\| \leq K \|x\|, \quad \text{si } \|x\| \leq r. \quad (3)$$

En combinant (a) et (p), on trouve l'estimation

$$\| \varphi_{mT+t}(y_0+x) - y_0 \| \leq K \left(\frac{3}{4}\right)^m \|x\| \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, T],$$

valable pour $\|x\| \leq r$, qui montre que y_0 est asymptotiquement stable.

b) La démonstration est similaire, mais plus délicate. On l'admet ici. \square

Une autre approche, également due à Lyapunov, est susceptible de s'appliquer lorsque la proposition p. 146 ne permet pas de conclure.

Déf: On dit qu'une fonction $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une fonction de Lyapunov pour l'EDO (1) si $dF(y) f(y) \leq 0 \quad \forall y \in V$.

Si F est une fonction de Lyapunov et $y(t)$ une solution de (1), alors

$$\frac{d}{dt} F(y(t)) = dF(y(t)) y'(t) = dF(y(t)) f(y(t)) \leq 0,$$

ce qui montre que F décroit (au sens large) le long des trajectoires de (1).

En particulier, si $y_0 \in V$ est un minimum local strict d'une fonction de Lyapunov F , alors y_0 est nécessairement un point d'équilibre de (1).

Proposition (second théorème de stabilité de Lyapunov). (Lyapunov n°1 Benjoui)

On suppose que $y_0 \in V$ est un point d'équilibre de l'EDO (1), et qu'il existe une fonction de Lyapunov $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ possédant un minimum local strict en y_0 . Alors y_0 est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov.

Dém: Quitte à remplacer F par $F - F(y_0)$, on peut supposer que $F(y_0) = 0$. Par hypothèse, pour tout $r > 0$ suff. petit, on a

$$m(r) := \min \{ F(y) \mid \|y - y_0\| = r \} > 0, \quad (*)$$

car la sphère $\partial B(y_0, r)$ est compacte, et la fonction continue F

admet un minimum local strict en y_0 , avec $F(y_0) = 0$.

148)

Soit $W_r = \{y \in B(y_0, r) \mid F(y) < m(r)\} \subset V$.

Alors W_r est un voisinage ouvert de y_0 dans V , et $\forall y \in W_r$ la solution issue de y vérifie $\varphi_t(y) \in B(y_0, r) \forall t \geq 0$.

En effet, si tel n'est pas le cas, il existe $T > 0$ tel que $\varphi_T(y) \in \partial B(y_0, r)$; de sorte que $F(\varphi_T(y)) \geq m(r)$, ce qui contredit le fait que

$F(\varphi_T(y)) \leq F(y) < m(r)$! Ainsi y_0 est un point d'équilibre stable. II

Il est également possible d'obtenir la stabilité asymptotique par cette méthode, sous des hypothèses appropriées.

Déf: On dit qu'une fonction continue $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte de l'EDO (1) si F décroît strictement le long de toutes les trajectoires de (1) qui ne sont pas des points d'équilibre.

En particulier, si $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $dF(x)f(x) < 0 \forall x \in V$ tel que $f(x) \neq 0$, alors F est une fonction de Lyapunov stricte.

Proposition: (Stabilité asymptotique par fonction de Lyapunov) ^(Lyapunov² Benjour)
On suppose que $y_0 \in V$ est un point d'équilibre isolé de l'EDO (1), et qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ possédant un minimum local strict en y_0 . Alors y_0 est asymptotiquement stable.

Dém: On sait déjà, par la proposition précédente, que y_0 est stable au sens de Lyapunov. Avec les mêmes notations, on peut supposer que $r > 0$ est suff. petit pour que, en plus de (*), la boule $B(y_0, r)$ ne contienne pas d'autre point d'équilibre que y_0 .

Soit $y \in W_r$ et $\gamma(t) = \varphi_t(y)$ la solution issue de y ; on sait que $\gamma(t) \in B(y_0, r) \forall t \geq 0$. Considérons l'ensemble ω -limite (de γ)

$$\omega = \left\{ \bar{y} \in V \mid \exists \text{ suite } t_m \rightarrow +\infty \text{ t.q. } y(t_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \bar{y} \right\}.$$

Cet ensemble possède les propriétés suivantes :

i) ω est compact et non vide. En effet, $y(t)$ est à valeurs dans la boule $\bar{B}(y_0, r)$, qui est compacte, donc toute suite $y(t_m)$ possède un point d'accumulation. $\Rightarrow \omega$ non vide. Il est clair que ω est aussi fermé, donc ω est compact.

ii) $\omega \subset W_r \subset B(y_0, r)$ car $F(y(t_m)) \leq F(y) < M(r) \forall m \in \mathbb{N}$.

iii) ω est invariant par le flot de l'EDO (1) : $\varphi_t(\omega) \subset \omega \forall t \geq 0$.

En effet, soit $\bar{y} = \lim_{m \rightarrow \infty} y(t_m) \in \omega$ et $\tau > 0$. Par continuité du flot, on a $\varphi_\tau(\bar{y}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_\tau(y(t_m)) = \lim_{m \rightarrow \infty} y(t_m + \tau)$, d'où $\varphi_\tau(\bar{y}) \in \omega$.

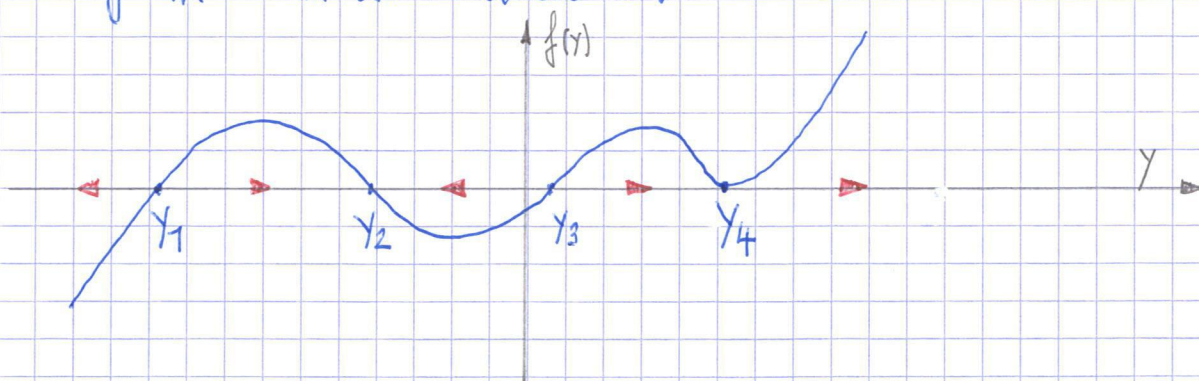
Rem : on montre de même que $\varphi_t(\omega) \subset \omega \forall t \leq 0$.

iv) $\omega \subset F^{-1}(l)$, où $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(y(t)) \in [0, M(r)[$.

Si $\bar{y} \in \omega$, on a donc $F(\varphi_t(\bar{y})) = l \forall t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que \bar{y} est un point d'équilibre de l'EDO (1), car F est une fonction de Lyapunov stricte. Mais le seul point d'équilibre dans la boule $B(y_0, r)$ est y_0 lui-même, donc $\omega = \{y_0\}$, ce qui équivaut à $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} y_0$. Ainsi y_0 est asymptotiquement stable. \square

6) Exemples de portraits de phase en dimension 1 et 2

a) On considère l'équation 1D : $y' = f(y)$,
où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .



Supposons pour simplifier que f admet un nombre fini de zéros Y_1, \dots, Y_n , qui sont donc les points d'équilibre du système. Ils délimitent des intervalles ouverts où f a un signe constant, de sorte que les solutions de l'EDO dans cet intervalle sont (strictement) monotones. Ainsi, dans l'exemple représenté ci-dessus :

- si $Y_1 < \gamma < Y_2$, alors $Y(t) = \varphi_t(\gamma)$ existe $\forall t \in \mathbb{R}$ (sol. globale) et $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Y_1$, $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Y_2$. ("Thm des bords")

En effet, $Y(t)$ est croissante et bornée supérieurement (par Y_2), donc $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{y} \leq Y_2$, et $Y'(t) = f(Y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} f(\bar{y})$. On doit donc avoir $f(\bar{y}) = 0$, d'où $\bar{y} = Y_2$. On raisonne de même lorsque $t \rightarrow -\infty$. \square

Si l'on souhaite calculer explicitement la solution, on observe que

$$t = \int_0^t \frac{Y'(t)}{f(Y(t))} dt = \int_{\gamma}^{Y(t)} \frac{1}{f(x)} dx = G(Y(t)) - G(\gamma),$$

où G est une primitive de $1/f$. Ainsi $Y(t) = G^{-1}(t + G(\gamma))$, $t \in \mathbb{R}$.

- Si $\gamma > Y_4$, alors la solution $Y(t) = \varphi_t(\gamma)$ est globale pour $t \leq 0$, et $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Y_4$ (comme ci-dessus). Pour les temps positifs:
 - $Y(t)$ est globale (et tend vers $+\infty$) si $\int_{Y_4+1}^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx = +\infty$
 - $Y(t)$ explose en temps fini si $\int_{Y_4+1}^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx < \infty$.

Même résultat mutatis mutandis pour $\gamma < Y_1$.

- Le point d'équilibre Y_2 est asymptotiquement stable. Notez que $f'(Y_2) < 0$.
- Les points d'équilibre Y_1, Y_3, Y_4 sont instables. Notez que $f'(Y_1) > 0$, $f'(Y_3) > 0$ (\Rightarrow on peut appliquer le thm de Lyapunov dans ces cas) $f'(Y_4) = 0$ (\Rightarrow le thm de Lyapunov ne s'applique pas ici).

Flot hamiltonien.

La dynamique des systèmes physiques régit par les lois de la mécanique de Sir Isaac Newton (1642-1727) peuvent dans bon nombre de cas se ramener au formalisme hamiltonien qui suit (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865, irlandais)

Les eq. de Hamilton: Soit $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , appelé le Hamiltonien (du système physique considéré).
 $(q, p) \mapsto H(q, p)$

Le système d'EDO: (H) $\begin{cases} q_j' = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p), & j=1,2,\dots,d \\ p_j' = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p), & j=1,2,\dots,d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q' = \nabla_p H(q, p) \\ p' = -\nabla_q H(q, p) \end{cases}$ définissent les eq. de Hamilton et ses solutions définissent le flot hamiltonien.

Ici $(q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ sont des solutions s'il existe $I \subset \mathbb{R}$ avec $t_0 \in I \ni t \mapsto (q(t), p(t))$ et différentiable et satisfait (H)

Exple: $H(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q)$ où $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , et appelé potentiel

(H) s'écrit $\begin{cases} q' = p \\ p' = -\nabla V(q) \end{cases}$ on a une $q'' = -\nabla V(q)$, l'eq. de Newton (1687) pour une particule (de masse 1) soumise à une force qui "dérive d'un potentiel" ($F(q) = -\nabla V(q)$).

$H(q, p) = \frac{1}{2}(p - A(q))^2 + V(q)$ où V un potentiel comme ci-dessus et $A(q): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 .

est appelé potentiel vecteur, et $\nabla \times A(q) = \text{rot } A(q) = \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix}(q) = B(q)$ le champ magnétique.

(H) s'écrit $\begin{cases} q_j' = p_j - A_j(q), \\ p_j' = \sum_k (p_k - A_k(q)) \partial_{q_j} A_k(q) - \partial_{q_j} V(q), & j=1,2,3. \end{cases}$ Exercice: retrouver la loi de Newton $q'' = q' \wedge B(q) - \nabla V(q)$

pour une particule chargée soumise à un champ magnétique et un potentiel.

Le hamiltonien représente l'énergie mécanique du système qui est une intégrale première du système (H):

$dH(q, p) = \left(\nabla_q H(q, p), \nabla_p H(q, p) \right) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$; le champ de vecteurs de (H) est $\begin{pmatrix} \nabla_p H(q, p) \\ -\nabla_q H(q, p) \end{pmatrix}$, ou bien que

$$dH(q, p) \cdot \begin{pmatrix} \nabla_p H(q, p) \\ -\nabla_q H(q, p) \end{pmatrix} = \langle \nabla_q H(q, p), \nabla_p H(q, p) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \langle \nabla_p H(q, p), -\nabla_q H(q, p) \rangle_{\mathbb{R}^d} \equiv 0.$$

En particulier, si $(q(t), p(t))$ est une solution sur I et $t_0 \in I$, $H(q(t), p(t)) = H(q(t_0), p(t_0)) \forall t \in I$. L'énergie est conservée.

Si $E \in \mathbb{R}$ on appelle l'ensemble $H^{-1}(\{E\})$ la couche d'énergie (energy shell).

Propriété: Soit $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 et $[E_-, E_+] \subset \mathbb{R}$ on $H^{-1}([E_-, E_+])$ est compact, non vide. Alors, le flot hamiltonien

$\Phi: \mathbb{R} \times H^{-1}([E_-, E_+]) \rightarrow H^{-1}([E_-, E_+])$ est bien défini (i.e. complet) de classe C^1 , préserve le volume induit un C^1 -difféom. (à t fixé)
 $(t, (q, p)) \mapsto \Phi_t(q, p)$

"Preuve:" Les solutions maximales sont globales, car on a une couche d'énergie qui est compacte par hypothèse, et le théorème de Poincaré s'applique.

Le flot Φ_t à $t \in \mathbb{R}$ est injectif sur $H^{-1}([E_-, E_+])$, et induit donc un difféo. global de classe C^1 . Finalement, le champ

de vect. hamiltonien est à divergence nulle: $\sum_j \partial_{q_j} \partial_{p_j} H(q, p) + \sum_j \partial_{p_j} (-\partial_{q_j} H(q, p)) \equiv 0$ par le théorème de Schwarz, $\Rightarrow \det(J_{\Phi_t}) \equiv 1$. \square

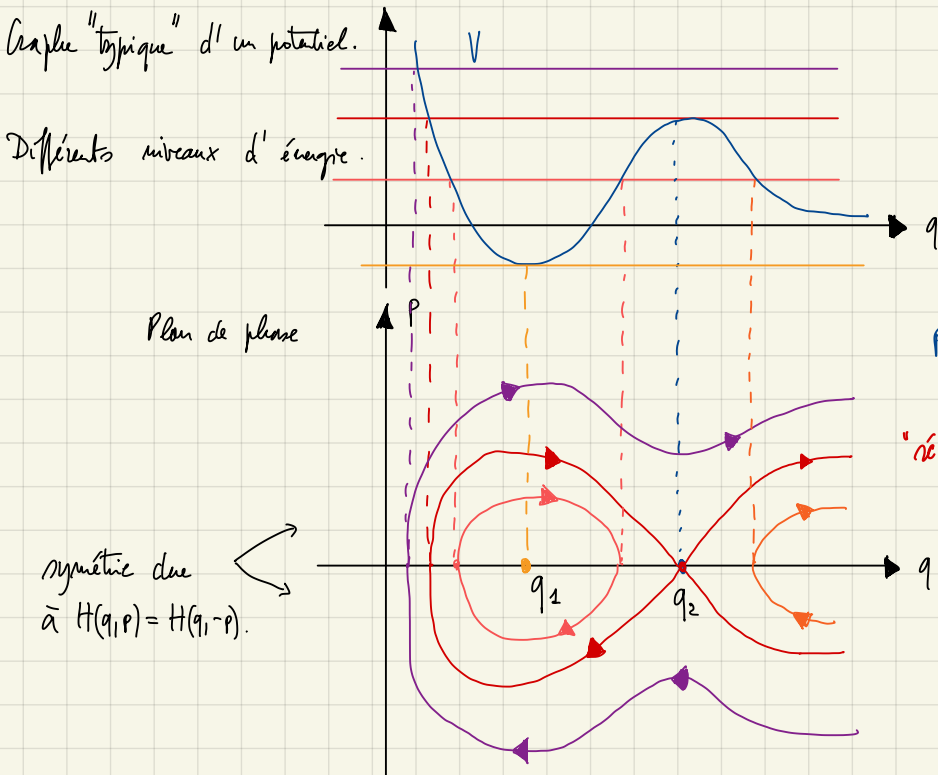
Portrait de phase pour la dynamique d'une particule dans un potentiel "typique" en dimension 1.

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = -\nabla V(q) \end{cases} \quad \text{sur } V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2. \quad \text{Rappel: le vecteur } \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V(q) \end{pmatrix} \text{ est tangent aux trajectoires.}$$

La conservation de l'énergie montre que $C(q_0, p_0) = \{ \varphi_t(q_0, p_0) \mid t \in I(q_0, p_0) \} \subset \{ (q, p) \mid \frac{p^2}{2} + V(q) = E \} = H^{-1}(\{E\}) \subset \mathbb{R}^2$,

où $E = \frac{p_0^2}{2} + V(q_0)$.

Note: $H^{-1}(\{E\})$ est une ∞ -variété de dim 1, de classe $C^2 \Leftrightarrow \forall (q, p) \in H^{-1}(\{E\}), \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V(q) \end{pmatrix} \neq 0$.



On suppose: V est monotonie par morceaux avec deux points critiques q_1, q_2 , non dégénérés

$$V(q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad V(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0^+} +\infty,$$

$$V(q_1) = \min_{q \in \mathbb{R}} V(q).$$

points d'équilibre: $\{(0, q_c) \mid \nabla_q V(q_c) = 0\}$

Ici: $(0, q_1)$ et $(0, q_2)$

"séparatrice".

les flèches données par la direction du vecteur $\begin{pmatrix} p \\ -\nabla V(q) \end{pmatrix}$.

Les trajectoires ne peuvent pas rebrousser chemin

$H(q, p)$ est une fonction de Lyapunov.

Stabilité des points fixes: $(0, q_1)$ est stable, mais pas asymptotiquement stable, puisque H est une fonction de Lyapunov.

• l'éq. linéarisée autour de $(0, q_2)$ est $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(q_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $V''(q_2) < 0$.

$\sigma(A) = \{ \pm \sqrt{|V''(q_2)|}, -\sqrt{|V''(q_2)|} \}$ d'où, on le flot est défini pour tout t , $(0, q_2)$ est instable.

• Globalité du flot: i) Si la courbe d'énergie associée $\bar{a}(q_0, p_0)$ est compacte, le résultat est vrai.

ii) Si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer $\varphi_t(q_0, p_0)$ en $t \rightarrow +\infty$ puisque $(q(t), -p(t))$ est sol. en $(q(t), p(t))$ l'éq.

Rem: Si $\varphi_t(q_0, p_0)$ s'approche de $(0, q_2)$, le point d'équilibre, elle reste dans un compact, donc la solution est globale.

Si $E = H(q_0, p_0) \geq \inf_q V(q) = V(q_1)$ avec nos hypothèses sur V , et $(q, p) \in H^{-1}(\{E\}) \Rightarrow q > 0$, et $|p| \leq \sqrt{2(E - V(q))} \leq \sqrt{2(E - V(q_1))}$

Ainsi, $q(t) = q_0 + \int_0^t p(s) ds \leq q_0 + \int_0^t |p(s)| ds = q_0 + t \cdot \sqrt{2(E - V(q_1))}^{\frac{1}{2}}$ est également fini $\forall t > 0$.

Exo: Exprimer le comportement temporel de la solution $(q(t), p(t))$ à l'approche de $(q_2, 0)$.

$q < q_2, q' > 0$

$$(q'(t))^2 = 2(V(q_2) - V(q(t))) \Rightarrow q'(t) = \sqrt{2(V(q_2) - V(q(t)))} \quad \text{i.e.} \quad \frac{q'}{\sqrt{2(V(q_2) - V(q))}} = 1 \Rightarrow \int_{q_0}^q \frac{dx}{\sqrt{2(V(q_2) - V(x))}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

Système "gradient" $y' = -\nabla V(y)$, où $V \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = dV(y(t)) y' = \nabla V(y(t))^T (-\nabla V(y(t))) = -\|\nabla V(y(t))\|^2 \leq 0.$$

Fonction de Lyapunov: $V(y)$ tq $dV(y) (-\nabla V(y)) = -\|\nabla V(y)\|^2 \leq 0$.

Si V admet y_0 comme unique point critique dans U ($dV(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_0$), y_0 est un point stationnaire dans U , pas nécessairement unique ($V(y_1, y_2) = y_1^2 \Rightarrow (0, y_2)$ est stationnaire, $y_2 \in \mathbb{R}$) et s'il est unique, il n'est pas nécessairement stable ($V(y) = -y^2$ sur \mathbb{R}).

• y_0 est asymptotiquement stable si c'est un minimum local strict de V

e.g.: $V(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i^2$, $\alpha_i > 0$.

• Plus quantitativement (pour V ci-dessus):

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = -\|\nabla V(y(t))\|^2 = -\sum_{i=1}^m 4\alpha_i^2 y_i^2(t) \leq -4\alpha_m \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i^2(t) = -4\alpha_m V(y(t)).$$

Pour $y_0 \neq (0, \dots, 0)$, $y(t) \neq (0, \dots, 0)$ et $V(y(t)) > 0$, $\forall t > 0$, d'où

$$\frac{d}{dt} \ln V(y(t)) \leq -4\alpha_m \quad \text{et} \quad \ln V(y(t)) - \ln V(y_0) \leq -4\alpha_m t \quad \text{i.e.} \quad V(y(t)) \leq V(y_0) e^{-4\alpha_m t}.$$

On a encore: $\|y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2(t) \leq \frac{1}{\alpha_m} \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i^2(t) = \frac{1}{\alpha_m} V(y(t)) \leq \frac{V(y_0)}{\alpha_m} e^{-4\alpha_m t}$.

Equations aux Dérivées Partielles : (EDP.)

Fundamentalement, il s'agit d'une relation entre une fonction de plusieurs variables, certaines de ses dérivées partielles et les variables indépendantes.

Notations: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière

On note: $\partial_{x_j} u := \frac{\partial}{\partial x_j} u: U \rightarrow \mathbb{R}$, $j=1, \dots, n$ ses dérivées partielles d'ordre 1

et, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u: U \rightarrow \mathbb{R}$.

On écrit aussi: $\partial_{x_1 x_1}^2 u = \partial^{(2, 0, \dots, 0)} u = \partial_{x_2}^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u = u_{x_1 x_1}$, etc...

Ainsi,

$$(1) F(\partial^{\alpha_1} u(x), \partial^{\alpha_2} u(x), \dots, \partial^{\alpha_m} u(x), u(x), x) = 0, \forall x \in U \text{ à } |\alpha_j| \leq |\alpha_{j+1}| \leq |\alpha_m| = m,$$

et $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ continue (ou autre) et donnée, est une E.D.P. d'ordre m

pour l'inconnue $u: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Exple: $F(\overset{\alpha_6}{\partial^{(2,1,0)}} u(x), \overset{\alpha_5}{\partial^{(0,0,3)}} u(x), \overset{\alpha_4}{\partial^{(0,1,1)}} u(x), \overset{\alpha_3}{\partial^{(1,0,0)}} u(x), \overset{\alpha_2}{\partial^{(0,1,0)}} u(x), \overset{\alpha_1}{\partial^{(0,0,1)}} u(x), u(x), x) = 0$.

$|\alpha_6|=3$ $|\alpha_5|=3$ $|\alpha_4|=2$ $|\alpha_3|=1$ $|\alpha_2|=1$ $|\alpha_1|=1$

Une solution classique est une fonction de classe $C^m(U; \mathbb{R})$ qui satisfait l'E.D.P.

plus, éventuellement des conditions à l'infini si U est non borné, et/ou des conditions de frontières ou de bords sur ∂U (auquel cas on supposera $u \in C^m(U) \cap C(\bar{U})$)

Exple: $U = \mathbb{R}^d$, condition $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ou $x \mapsto e^{-|x|^2} u(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

U borné, condition $u|_{\partial U} = 0$; ou $u|_{\partial U} = g$ donnée.

En toute généralité, il est hors de question de résoudre une E.D.P. explicitement, ni même d'en exhiber le comportement qualitatif.

On se concentrera sur des E.D.P. d'ordre 1 et 2, "linéaires ou presque", selon la

Classification: (Définition / vocabulaire)

i) L'E.D.P. (1) est dite linéaire d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si elle s'écrit sous la forme :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x), \quad \forall x \in U \subset \mathbb{R}^d, \quad \text{pour des } f \text{ et } a_\alpha \text{ donnés.}$$

Si $f(x) \equiv 0$, on parle d'E.D.P. linéaire homogène (d'ordre m). Rem: $\partial^0 u(x) \equiv u(x)$.

ii) L'E.D.P. (1) est dite semi-linéaire (d'ordre m) si elle s'écrit :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + a_0(\partial^{\beta_1} u, \partial^{\beta_2} u, \dots, \partial^{\beta_l} u, u, x) \equiv 0, \quad \forall x \in U, \quad \text{avec } |\beta_j| < m, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$$

iii) L'E.D.P. (1) est dite quasi-linéaire (d'ordre m) si elle prend la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\partial^{\beta_1} u, \partial^{\beta_2} u, \dots, \partial^{\beta_l} u, u, x) \partial^\alpha u(x) + a_0(\partial^{\beta_1} u, \partial^{\beta_2} u, \dots, \partial^{\beta_l} u, u, x) = 0, \quad \forall x \in U$$

avec $|\beta_j| < m, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}, \quad |\beta'_j| < m, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, l\}$

iv) L'E.D.P. est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement des différentielles d'ordre le plus élevé.

Remarque: Si u_1 et u_2 sont solutions de la même E.D.P. linéaire, avec termes inhomogènes f_1 et f_2 , alors $\alpha u_1 + \beta u_2$ est sol. de l'E.D.P. linéaire avec terme inhomogène $\alpha f_1 + \beta f_2$,
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A une E.D.P. linéaire homogène d'ordre m on associe l'opérateur différentiel linéaire $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$
de sorte que l'E.D.P. s'écrit $Lu = 0$.

Rem: $L: C^m(U) \rightarrow C(U)$ est effectivement linéaire (avec a_α cont.)

Si $m=2$, cas que l'on considérera le plus souvent ici,

$$\text{on écrit } \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) \partial^\alpha = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \quad \text{avec } \underline{a_{ij}(x) = a_{ji}(x)} \text{ continues, ; soit } \underline{A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}}$$

Ceci donne lieu à une première classification des EDP d'ordre 2 :

On dit que

L est uniformément elliptique si $\sigma(A(x)) = \{ \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_d(x) \}$, $\inf_{x \in \bar{U}} \lambda_j(x) > 0$; $x \in \bar{U} \subset \mathbb{R}^d$. ← avec répétitions.

Exemple: l'éq. de Laplace $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u = 0$ ($\equiv \Delta u$)
 $A(x) = \mathbb{1}$ $\Rightarrow \sigma(A(x)) = \{1\}$. (mult. d)

L est uniformément hyperbolique sur $V \subset \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$ si

$L = \partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ $\bar{a} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ est unif. elliptique.

Exemple: l'éq. des ondes $\partial_t^2 u - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

L est uniformément parabolique sur $V \subset \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$ si

$L = \partial_t - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ $\bar{a} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ est unif. elliptique.

Exemple: l'éq. de la chaleur $\partial_t u - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Comme nous le verrons, les propriétés des solutions de ces équations sont très différentes.

Quelques exemples emblématiques:

Cas linéaires.

- 1) l'équation de transport: $U = \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$
 $u_t + \sum_{i=1}^d b_i u_{x_i} = 0$, 1^{er} ordre, linéaire. (Avec éventuellement un terme inhomogène)
Condition de bord/initiale: $u(x, 0) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

Rem: 1) $u_t = \partial^{(0,0,\dots,1)}$ u , $u_{x_i} = \partial^{(0,\dots,1,\dots)}$ u ; 2) $u(x,t) \equiv u_0$ est une solution.

- 2) l'éq. de Laplace: $U \subset \mathbb{R}^d$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i} = 0, \text{ 2nd ordre, linéaire} \quad \text{Rem: } u(x) = \sum_{i=1}^d a_i x_i + a_0 \text{ est solution.}$$

et sa version inhomogène, l'éq. de Poisson

$$-\Delta u = f, \quad \tilde{m} \quad f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ donnée.} \quad \text{Avec, éventuellement des } \underline{\text{cond. de bord.}}$$

convention \rightarrow

- 3) l'éq. de la chaleur ou de diffusion: sur $U \times \mathbb{R}_t^+$ $\tilde{m} \quad U \subset \mathbb{R}^d$

$$u_t - \Delta_x u = 0 \quad \text{2nd ordre, linéaire} \quad \text{Rem: } u(t,x) = \sum_{i=1}^d a_i x_i + a_0 \text{ est solution.}$$

Condition initiale $u(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, + condition d'intégrabilité/de bord.

- 4) l'éq. des ondes: sur $U \times \mathbb{R}_t$ $\tilde{m} \quad U \subset \mathbb{R}^d$

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad \text{2nd ordre, linéaire} \quad \text{Rem: } u(x,t) = bt + \sum_{i=1}^d a_i x_i + a_0 \text{ est solution.}$$

Condition initiale $u(x, 0) = g(x)$; $u_t(x, 0) = h(x)$, $x \in U$

Il y en a d'autres!

On considère également des versions plus générales, avec terme inhomogène et/ou coefficients non constants.

Cas non linéaires (que nous abordons pour certains d'entre eux.)

1) loi de conservation (1 d) $U = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad \text{Condition initiale } u(x, 0) = g(x).$$

Version en dimension quelconque: $U = \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$u_t + \sum_{i=1}^d (F_i(u))_{x_i} = 0, \quad \text{i.e. } u_t + \operatorname{div}(F(u)) = 0, \quad \text{Condition initiale } u(0, x) = g(x).$$

2) éq. de Poisson non linéaire $U = \mathbb{R}^d$

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{à } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad + \text{condition d'intégrabilité.}$$

3) éq. de réaction-diffusion $U = \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t^+$

$$u_t - \Delta_x u = f(u) \quad \text{à } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Et bien d'autres encore !

Commençons par l'éq. de transport, qu'on écrit (T) $\partial_t u + b \cdot \nabla_x u = 0$ à $b \in \mathbb{R}^d$, sur $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t^+$.

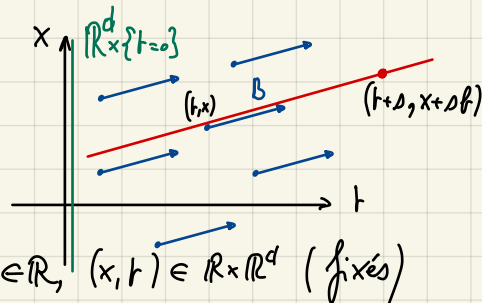
Cela ne nécessite pas d'autres nouveaux dans un premier temps et nous venons à introduire la méthode dite des caractéristiques.

Avec $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_d} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$, (T) s'écrit $B \cdot \nabla u(x, t) = 0$ sur $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t^+$.

i.e. la dérivée directionnelle, $\partial_B u(x, t) = du(x, t) \cdot B = 0$

en d'autres termes, les lignes de niveau de u sont // à B .

Ainsi $u(x, t)$ est constante le long des droites $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + sB$, $s \in \mathbb{R}$, $(x, t) \in \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t^+$ (fixés)



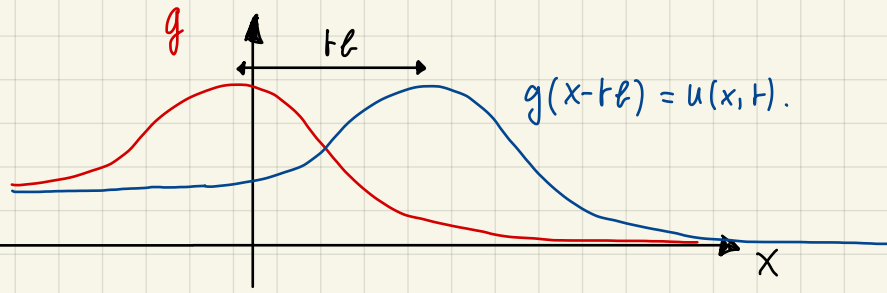
↑
Caractéristiques

Plus précisément, on pose $z(s) := u(x+sb, t+s)$ et on vérifie $\dot{z}(s) = \frac{d}{ds} z(s) = du(x+sb, t+s) \cdot B = 0$, ($\dot{\cdot} = \frac{d}{ds}$)

supposant u différentiable. Si on connaît u en un point de chaque droite, on connaît u partout.

Condition initiale: Soit $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable et impair $u(x,0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^d$.

le plan $\mathbb{R}_x^d \times \{t=0\}$ coupe toutes les droites caractéristiques $\Rightarrow u(x,t) = u(x-tt, 0) \equiv g(x-tt)$
 \uparrow
 $s=-t$



Rem:

Formellement: $u(x,t) = e^{-tt \cdot \nabla_x} g(x)$.

" $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est le générateur des translations"

Remarques: • Même si g n'est pas différentiable, on a envie de dire que $g(x-tt)$ est solution, on y reviendra.

• Les droites caractéristiques s'écrivent $X(s) = st + x, s \in \mathbb{R}$, et satisfont l'EDO: $\begin{cases} \dot{X}(s) = t \\ X(0) = x \end{cases}$

• Sur cette branche, considérons l'éq. de transport inhomogène en espace

(TI) $u_t + b(x) \cdot \nabla_x u = 0$ sur $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$, où $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe C^1 ,

de condition initiale: $u(x,0) = g(x)$, où $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.

Par analogie, définissons les courbes caractéristiques via l'EDO.

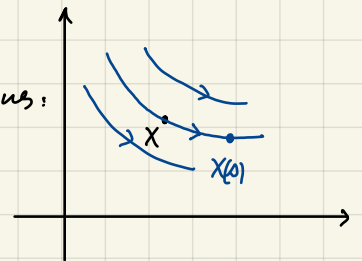
$$(CAR) \begin{cases} \dot{X}(s) = b(X(s)) \\ X(0) = x \end{cases} \quad (\text{de flot } \phi)$$

Cauchy-lipschitz assure l'existence et l'unicité locale sur $I(x) \subset \mathbb{R}, 0 \in I(x)$.

Calculons les variations d'une solution $u(x,t)$ différentiable le long des caractéristiques:

Soit $t \in I(x), s \in [0, -t]$ et $z(s) := u(X(s), s+t)$

$$\Rightarrow \dot{z}(s) = d u(X(s), s+t) \cdot \begin{pmatrix} \dot{X}(s) \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{(CAR)}{=} \nabla_x u(X(s), s+t) \cdot b(X(s)) + \partial_t u(X(s), s+t) \cdot 1 \stackrel{(TI)}{=} 0$$



Ainsi, $u(x,t) = u(X(-t), 0) = g(X(-t))$. On a donc $u(x,t) = g(\phi_{-t}(x))$, où ϕ_t est le flot associé à CAR.

Le théorème de régularité locale du flot assure que $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ est localement C^1 ,

d'où: $u(x,t) := g(\phi_{-t}(x))$ satisfait (TI) et la cond. initiale sur un voisinage de (x,t)

Rem: • Si $g(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0$. Cela montre l'unicité de la solution locale. (diff = 0)

• Les mêmes arguments s'appliquent au cas où $b: \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^d$ est C^1 .

Exercices: • Vérification que $g(\phi_t(x))$ satisfait (T1).

- Adapter la méthode pour résoudre l'éq. de transport inhomogène sur $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$
 $\partial_t u + b \cdot \nabla_x u = f$; $u(x, 0) = g(x)$; $\bar{a} \cdot g$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, et $b \in \mathbb{R}^d$.

Montrer que $u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (t-s)b, s) ds$

Considérons l'éq. des ondes sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$
de conditions initiales

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) ; \partial_t u(x, 0) = h(x) \end{cases}, \bar{a} \cdot g \in C^2, h \in C^1$$

En dimension 1 d'espace, l'éq. des ondes se réduit à deux équations de transport:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) u = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) u$$

En exercice: $u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$ Formule de d'Alembert (1746)

Rem: $u(x, t) = V_1(x-t) + V_2(x+t)$

Conséquence:

La solution de l'éq. des ondes dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ avec $g \in C^2(\mathbb{R})$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$ est unique

(S'il existe 2 solutions classiques u_1 et u_2 , $v := u_2 - u_1$ satisfait l'éq. avec conditions initiales nulles et d'Alembert implique $v \equiv 0$.)

Remarque: Cela montre également que si l'éq. des ondes inhomogène de $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$

$$u_{tt} - u_{xx} = j, \quad u(\cdot, 0) = g, \quad u_t(\cdot, 0) = h, \quad \bar{a} \cdot g \in C^2(\mathbb{R}_x), h \in C^1(\mathbb{R}_x), j \in C^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t)$$

admet une solution classique ($u \in C^2$), alors elle est unique, avant même de savoir l'exprimer si elle existe!

(Si u_1 et u_2 sont deux telles solutions, $v = u_1 - u_2$ satisfait l'éq. des ondes homogène avec conditions de bord nulles $\Rightarrow v \equiv 0$.)

Exercice: Exprimer la solution de l'éq. inhomogène.

Loi de conservation (en dimension 1 d'espace) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tq $|g(x)| \leq G \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On cherche (dans le cas idéal)

$$u: \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longmapsto u(x, t) \text{ de classe } C^1 \text{ tq}$$

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad (LC)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad (\text{au sur un sous-ensemble de } \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Note: Exploitant la dernière ligne on peut écrire $\partial_t u + f'(u) \partial_x u = 0$ qui est quasi-linéaire
 (transport avec $b \equiv f'(u)$).

Eq caractéristique: Supposons qu'il existe une solution u de classe C^1 , au moins localement.

On a $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 et $\dot{y}(s) = f'(u(y(s), s)) = f' \circ u(y(s), s); \quad y(0) = y_0 \quad (CAR)$

le thm. de Cauchy-Lipschitz assure que $y(s; y_0) = \phi_s(y_0)$ est bien définie localement, i.e. $\exists \delta \in \mathbb{I}(y_0)$.

Rem: la solution de (CAR) dépend de u , la solution de (LC), que l'on n'a pas encore...

Considérons $\frac{d}{dt} u(y(t), t) = \partial_x u(y(t), t) \dot{y}(t) + \partial_t u(y(t), t) \stackrel{(CAR)}{=} \partial_x u(y(t), t) f'(u(y(t), t)) + \partial_t u(y(t), t) = 0$
 $\forall t \in \mathbb{I}(y_0)$.

Donc $u(y(t), t) = u(y_0, 0) \equiv g(y_0), \quad \forall t \in \mathbb{I}(y_0)$.

Retenant à CAR, on a déduit $\dot{y}(s) = f'(u(y_0, 0)) = f' \circ g(y_0)$ qui est constante.

les courbes caractéristiques sont donc des droites: $y(s) = f' \circ g(y_0) s + y_0. \quad \forall s \in \mathbb{R}.$
 (et ne dépendent pas de u !)

La méthode de résolution est alors la suivante: (suivant les conditions nécessaires sur u ci-dessous)

$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$, trouver $y \in \mathbb{R}$ tq $x = f' \circ g(y) \cdot t + y;$ Note: $y = y(x, t)$ est fonction de (x, t)

Poser: $u(x, t) = g(y(x, t)).$ Reste à montrer que sous des hypothèses raisonnables, c'est possible:

Vérification: Soit $F^t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y \mapsto y + t f' \circ g(y)$. F^t est C^1 et comme g est unif. bornée sur \mathbb{R} ,
 $\lim_{y \rightarrow \pm \infty} F^t(y) = \pm \infty$. Ainsi, $\forall x, \exists y$ tq $F^t(y) = x$.

Cependant la solution pourrait ne pas être unique.

On impose alors de plus: $f' \circ g$ est croissante. Dans ce cas, $\forall t \geq 0, F^t$ est strict. croiss. et $y(x, t)$ unique.

Par le théorème de la fonction implicite appliqué à $G(x, t, y) = x - t f' \circ g(y) - y, C^1$ sur $(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y)$,

on a $(x, t) \mapsto y(x, t)$ est C^1 , donc $(x, t) \mapsto g(y(x, t))$ est C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $u(x, t) = g(y(x, t))$ est solution

Comme on le vérifie facilement: c'est un exo!

Eq. de Laplace: $\Delta v(x) = 0, \forall x \in U \subset \mathbb{R}^d, U$ ouvert, $v \in C^2(U)$
 avec la condition de bord: $v(x) = f(x), \forall x \in \partial U$ (si $\partial U \neq \emptyset$), où f continue.
 Avant d'exhiber des solutions, montrons une propriété qui permet d'obtenir l'unicité dans certains cas.

Principe du maximum: (version simple)

Soit U un ouvert borné de \mathbb{R}^d et $v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ tq $\Delta v(x) \geq 0, \forall x \in U$.
 Alors le maximum de v est atteint sur ∂U .

Remarques:

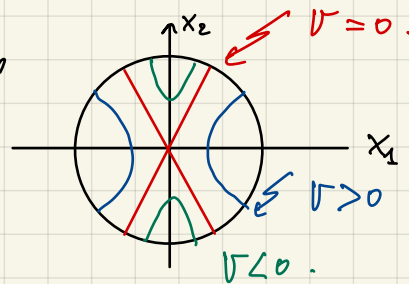
- c'est une propriété héritée du caractère elliptique de l'E.D.P.:

Dans le cas hyperbolique, un contre-exemple simple est donné par
 $u(x, t) = \sin(x)\sin(t)$ sol. de $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ sur $U = [0, 2\pi]_x \times [0, 2\pi]_t$.

- $\Delta v \geq 0$ n'implique pas que v est convexe, même dans le cas $\Delta v > 0$.

Considérons $v(x) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$, tq $\Delta v(x) = 1 > 0$, sur $U = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Ses lignes de niveau ont l'allure suivante, incompatible avec la convexité.



- le minimum de v , si $\Delta v \geq 0$, peut-être atteint sur U , même si $\Delta v = 0$.

$v(x) = x_1^2 + x_2^2$ sur $U = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ tq $\Delta v(x) = 4$ et $v(x) \geq 0, v(0,0) = 0$.

($v(x) \equiv 0$ tq $\Delta v(x) \equiv 0$ atteint son min et son max sur U).

- Si $\Delta v \equiv 0$, ses valeurs extrêmes sont atteintes sur ∂U .

Preuve:

i) \bar{U} borné et v continue sur $\bar{U} \Rightarrow$ les extrema sont atteints sur \bar{U} compact.

ii) on suppose l'hypothèse plus forte: $\Delta v(x) > 0, \forall x \in U$, et on procède par absurde:

si $z_0 \in U$ tq $\max_{x \in \bar{U}} v(x) = v(z_0)$, alors $\nabla v(z_0) = 0$ (z_0 pt. critique)

et $\text{Hess } v(z_0) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(z_0) \right)_{1 \leq i, j \leq d} \leq 0$, matrice négative. (z_0 max)

i.e. $\sigma(\text{Hess } v(z_0)) \subset \mathbb{R}^-$, $\Rightarrow \lambda_2 \text{ Hess } v(z_0) \equiv \Delta v(z_0) \leq 0$ et \downarrow .

iii) si $\Delta v(x) \geq 0$, on définit $v_\varepsilon(x) := v(x) + \frac{\varepsilon}{2d} \sum_{i=1}^d x_i^2$, $\varepsilon > 0$.

tq $\Delta v_\varepsilon(x) \geq \varepsilon$ et $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v(x)$ unif sur \bar{U} (\bar{U} compact)

Si $z_0 \in U$ tq $v(z_0) > v(x), \forall x \in \partial U$. Alors pour ε assez petit, unif. en $x \in \partial U$,

$v_\varepsilon(z_0) > v_\varepsilon(x), \forall x \in \partial U$, en contradiction avec ii). (Prendre $\frac{\varepsilon}{2d} \text{diam}(\bar{U}) \leq \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial U} (v(z_0) - v(x))$)
 \square .

"Upgrade" Si Δ remplacé par $L = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ uniformément elliptique, avec $a_{ij} \in C(\bar{U})$, le même résultat est vrai sous les mêmes hypothèses.

Rem: il y a d'autres généralisations; (essayez d'ajouter $\sum_i b_i(x) \partial_{x_i} + c(x)$ par exple.)

(Modifications de la) preuve:

• Ici $A(x) = \overset{t}{A}(x)$ continue, tq $\alpha = \inf_{x \in \bar{U}} \sigma(A(x)) > 0$, i.e. $A(x) > 0$.

car les zéros d'un polynôme sont des fonctions continues des coefficients du polynôme.

- au point ii), si $z_0 \in U$ est un maximum de v , on a

$$\begin{aligned} L v(z_0) &= \sum_{i,j} a_{ij}(z_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} v(z_0) = \text{tr} (A(z_0) \text{Hess} v(z_0)) = \text{tr} (A^k(z_0) \text{Hess} v(z_0) A^k(z_0)) \\ &= \sum_j \underbrace{(A^k(z_0) e_j, \text{Hess} v(z_0) A^k(z_0) e_j)}_{\leq 0} \leq 0 \quad \text{entraîne la } \downarrow. \end{aligned}$$

- au point iii), $L v_\varepsilon(x) = L v(x) + \frac{\varepsilon}{d} \sum_{i=1}^d a_{ii}(x) = L v(x) + \frac{\varepsilon}{d} \text{tr} A(x) \geq \varepsilon \alpha > 0$,
et on conclut de la même façon. \square .

Corollaire: Si il existe $v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ solution de $\begin{cases} L v(x) = g(x) & \forall x \in U \\ v(x) = f(x) & \forall x \in \partial U \end{cases}$
 \bar{U} borné, $g, a_{ij} \in C(\bar{U})$ et $f \in C(\partial U)$
 alors v est unique.

Preuve: Si v_1 et v_2 sont deux tels solutions, alors $v := v_2 - v_1$ est solution de $L v(x) = 0 \quad \forall x \in U$, $v(x) = 0 \quad \forall x \in \partial U$.

Le principe du maximum pour v implique $v(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$, puisque $v|_{\partial U} = 0$ et appliqué à $(-v)$, il donne $v(x) \geq 0$ pour les mêmes raisons et $v = 0$ sur \bar{U} . \square

Rem: On peut résoudre le problème en le séparant en deux problèmes plus simples.

$$\begin{cases} \Delta v_1 = g \\ v_1|_{\partial U} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta v_2 = 0 \\ v_2|_{\partial U} = f \end{cases} \quad \Rightarrow v = v_1 + v_2.$$

On étend le prolongement $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ à $\varphi \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ tq $\varphi|_{\partial U} = f$

$$\text{et pose } \tilde{v} := v - \varphi \text{ tq } \begin{cases} \Delta \tilde{v} = g - \Delta \varphi \\ \tilde{v}|_{\partial U} = 0 \end{cases}.$$

La fonction v_2 ci-dessus est un prolongement de f particulière.

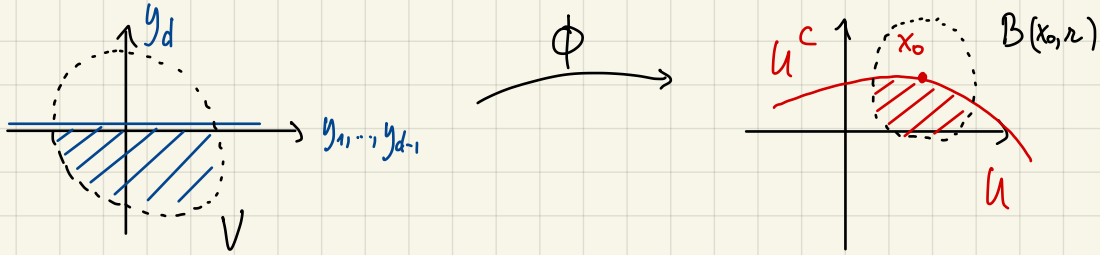
Rem: Si $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 > 0\}$, $\partial U = \{x_1 = 0\}$. $v(x) = a x_1$ est solution de $\Delta v(x) = 0$; $v(x)|_{\partial U} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. L'hyp. U borné est nécessaire à l'unicité.

Formule de Green / Théorème de la divergence / Théorème de Gauss "Tensor Geo-Diff."

Soit U ouvert borné de \mathbb{R}^d , $\text{Int. } \partial U$ soit C^2 . (c'est à dire :

$\forall x_0 \in \partial U, \exists r > 0, V$ ouvert de \mathbb{R}^d tq $0 \in V, \phi: V \rightarrow B(x_0, r)$ un C^2 -diffeo

tq $\phi(0) = x_0; \phi(V \cap \{y_d = 0\}) \subset \partial U; \phi(V \cap \{y_d < 0\}) \subset U; \phi(V \cap \{y_d > 0\}) \subset U^c$.

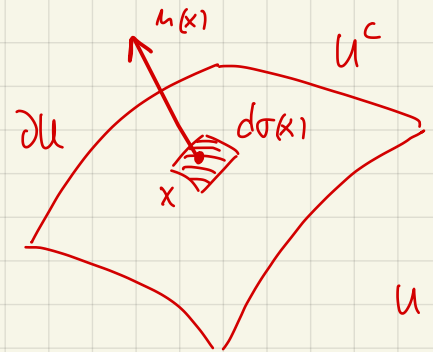


Soit $F: \bar{U} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $x \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$ tq $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{U}, \mathbb{R}^d)$.

Soit $n: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^d \cap B(0, 1)$ le vecteur unité normal
 $x \mapsto n(x)$

a ∂U (en x) vers l'extérieur de U

et $d\sigma(x)$ "l'élément de surface" dans \mathbb{R}^{d-1} (voir plus bas)



Le théorème de la divergence (de Gauss) affirme

$$\int_U (\nabla \cdot F)(x) dx = \int_{\partial U} F(x) \cdot n(x) d\sigma(x)$$

$$\bar{n} (\nabla \cdot F)(x) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} F_i(x) = \text{div}(F)(x).$$

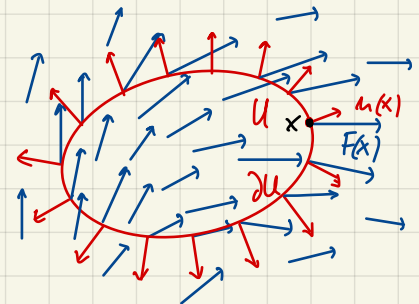
Rem: le membre de gauche est une intégrale de volume alors que celui de droite est une intégrale de surface.

Corollaire: formules de Green

Soit f et $g \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ \bar{n} U comme ci-dessus

$$\int_U (f(x) \Delta g(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)) dx = \int_{\partial U} f(x) \nabla g(x) \cdot n(x) d\sigma(x)$$

$$\int_U (f(x) \Delta g(x) - g(x) \Delta f(x)) dx = \int_{\partial U} (f(x) \nabla g(x) - g(x) \nabla f(x)) \cdot n(x) d\sigma(x)$$



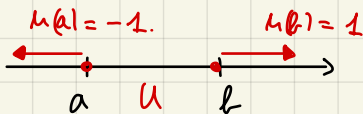
$$(\nabla h(x) \cdot n = \frac{\partial h(x)}{\partial n})$$

(Souvent avec $f|_{\partial U} = g|_{\partial U} = 0$)

Preuve: Prendre $F(x) = f(x) \nabla g(x)$ et noter que $\nabla F = f \Delta g + \nabla f \nabla g$. Puis $f \leftrightarrow g$ et contraction \square

Interprétation de $\int_{\partial U} F(x) \cdot n(x) d\sigma(x)$ dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

d=1: $U =]a, b[$, $\partial U = \{a, b\}$

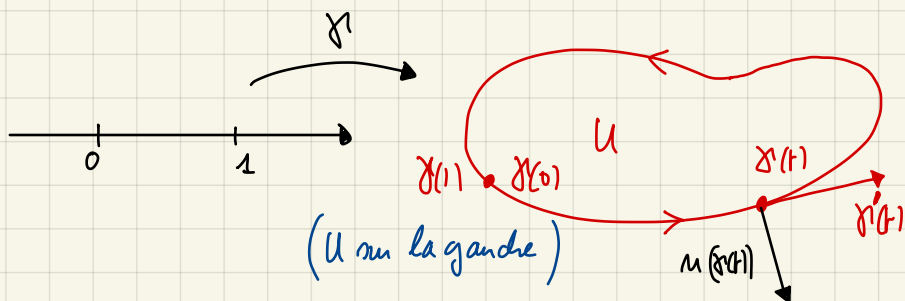


$d\sigma(a) = d\sigma(b) = 1$. (mesure de comptage!); $F(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla F(x) = F'(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b F'(x) dx = F(b) \cdot n(b) + F(a) \cdot n(a) = F(b) - F(a).$$

d=2: ∂U courbe plane fermée simple orientée positivement délimitant U , définie par une paramétrisation: $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ (loc. donnée par ϕ)

tg $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\gamma \in C^1([0, 1])$ injective sur $]0, 1[$, $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$



$$n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$d\sigma(x) = \|\gamma'(t)\| dt$$

$x = \gamma(t)$

$$\text{tg } \int_{\partial U} d\sigma(x) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \text{long}(\partial U)$$

Si bien que si $F \in C^1(\overline{U} \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ on a

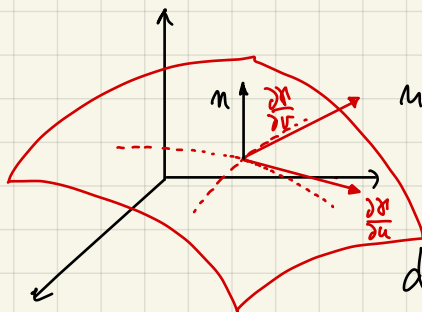
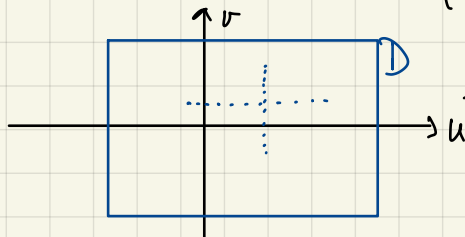
$$\begin{aligned} \int_U (\partial_{x_1} F_1(x) + \partial_{x_2} F_2(x)) dx_1 dx_2 &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 (F_1(\gamma(t)) \gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t)) \gamma_1'(t)) dt \\ &\equiv \int_{\partial U} F_1(x) dx_2 - F_2(x) dx_1. \end{aligned}$$

d=3:

∂U une surface dans \mathbb{R}^3 définie (localement) par une paramétrisation:

$\gamma : D \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij}} \gamma(D) \subset \mathbb{R}^3$; \overline{D} compact, $\gamma \in C^2(D \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$; tg $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \neq 0$ sur D ,

$$(u, v) \mapsto \gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u, v) \\ \gamma_2(u, v) \\ \gamma_3(u, v) \end{pmatrix}$$



$$n(\gamma(u, v)) = \pm \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

$x = \gamma(u, v)$

$$d\sigma(x) = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

$$\text{tg } \int_{\partial U} d\sigma(x) = \int_D \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv = \text{surf}(\partial U). \text{ si } \gamma(\overline{D}) = \partial U$$

Si bien que si $F \in C^1(\bar{U} \subset \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, on a avec $a \wedge b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$\int_U (\partial_{x_1} F_1(x) + \partial_{x_2} F_2(x) + \partial_{x_3} F_3(x)) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_D F(x(u,v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) du dv$$

si $\mathcal{J}(D) = \partial U$ et $\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v}$ extr. $\rightarrow = \int_D \det \left(F(x(u,v)); \frac{\partial x}{\partial u}(u,v); \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \right) du dv$

d > 3 Des expressions semblables sont vraies, via le formalisme des formes différentielles.

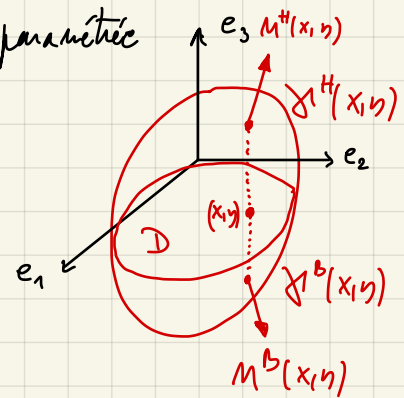
Rem: • par hypothèse, on intègre des fctns continues sur des compacts.

- on partage U et ∂U en morceaux si une paramétrisation globale n'est pas disponible.
- le théorème sera démontré en géo-diff sous sa forme générale.

"Preuve": (dans un cas simple)

Supposons que $d=3$, que U est convexe et ∂U est paramétrisé

par deux graphes $D \ni (x,y) \mapsto \mathcal{J}^H(x,y)$
 $D \ni (x,y) \mapsto \mathcal{J}^B(x,y)$



Considérons $F(x) \equiv F_3(x,y,z)e_3$ et $F_3 \in C^1(\bar{U} \subset \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

$$\int_U \partial_z F_3(x) dx dy dz = \int \int \left(\int_{\mathcal{J}_3^B(x,y)}^{\mathcal{J}_3^H(x,y)} \partial_z F_3(x,y,z) dz \right) dy dx = \int (F_3(x,y, \mathcal{J}_3^H(x,y)) - F_3(x,y, \mathcal{J}_3^B(x,y))) dx dy$$

Par ailleurs: $\partial_x \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathcal{J}^H(x,y) \end{pmatrix} \wedge \partial_y \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathcal{J}^H(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x \mathcal{J}^H(x,y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y \mathcal{J}^H(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_3^H(x,y) > 0 \\ m_3^B(x,y) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F(x) \cdot n(x) d\sigma(x) = \pm F_3(x,y,z) \Big|_{\partial U} dx dy$; + sur partie haute, - sur partie basse

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot n(x) d\sigma(x) = \int_D F_3(x,y, \mathcal{J}_3^H(x,y)) dx dy - \int_D F_3(x,y, \mathcal{J}_3^B(x,y)) dx dy$$

En répétant l'argument pour $F = F_1 e_1$ et $F = F_2 e_2$ sous l'hypothèse que ∂U soit paramétrisé de façon semblable dans ces deux directions, on obtient le résultat par linéarité \square .

Remarque: La 1^{ère} formule de Green donne une autre preuve du fait que $\Delta v = 0$ dans U connexe borné et $v = 0$ sur $\partial U \Rightarrow v \equiv 0$ par une solution classique

$$\left(\begin{array}{l} \text{Prendre } f = g = v \Rightarrow \int_U (\underbrace{v(x) \Delta v(x)}_{\equiv 0} + \nabla v(x) \cdot \nabla v(x)) dx = \int_{\partial U} v(x) \nabla v(x) \cdot \underbrace{n(x)}_{\uparrow v|_{\partial U} \equiv 0} d\sigma(x) \equiv 0 \\ \text{i.e. } \int_U \|\nabla v(x)\|^2 dx = 0 \Rightarrow \nabla v(x) \equiv 0 \text{ et } v(x) \equiv 0 \text{ car } v|_{\partial U} \equiv 0. \end{array} \right)$$

Valours moyennes:

Soit $v \in C^2(U)$, U ouvert de \mathbb{R}^d tel que $\Delta v = 0$. On dit que v est une fonction harmonique

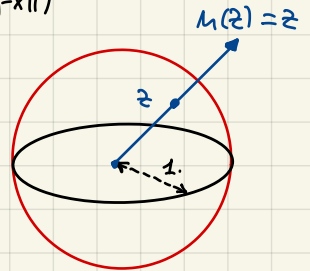
Théorème: Si $v \in C^2(U)$ est harmonique, alors

$$v(x) = \frac{1}{\underbrace{V_d B(x,r)}_{=: V(r)}} \int_{B(x,r)} v(y) dy = \frac{1}{\underbrace{\text{aire } \partial B(x,r)}_{=: A(r)}} \int_{\partial B(x,r)} v(y) d\sigma(y), \quad \forall B(x,r) \subset U.$$

Rem: $V(r) = \int_0^r A(\rho) d\rho = \omega(d) \cdot r^d$; $A(r) = \omega(d) d r^{d-1}$; $n(y) = \frac{y-x}{\|y-x\|} = \frac{y-x}{r}$

En coord. sphériques $d\sigma(y)$ tel que $\int_{\partial B(x,r)} d\sigma(y) = A(r) \Rightarrow d\sigma(y) = r^{d-1} d\sigma\left(\frac{y-x}{r}\right)$

Preuve: Soit $\phi(r) := \frac{1}{A(r)} \int_{\partial B(x,r)} v(y) d\sigma(y) = \frac{1}{A(r)} \int_{\partial B(0,1)} v(x+rz) d\sigma(z)$.



$$\Rightarrow \phi'(r) = \frac{1}{A(r)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla v(x+rz) \cdot z d\sigma(z) = \frac{1}{A(1)} \int_{\partial B(0,1)} r \Delta v(x+rz) dz \equiv 0.$$

Thm. div. $\in U$ si $r > 0$ petit.

Ainsi, $\forall r > 0$, $\phi(r) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(\rho)} \int_{\partial B(x,\rho)} v(x+\rho z) d\sigma(z) = v(x)$. (lim sans \int)

Plus, en coord. sphériques, $\int_{B(x,r)} v(y) dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} v(y) d\sigma(y) \right) d\rho = v(x) \int_0^r A(\rho) d\rho \equiv v(x) V(r)$ \square .

Théorème: Si $v \in C^2(U)$ satisfait $v(x) = \frac{1}{A(r)} \int_{\partial B(x,r)} v(y) d\sigma(y)$ pour toute boule $B(x,r) \subset U$, alors v est harmonique (sur U).

Preuve: Si $\Delta v \neq 0$, $\exists B(x,r) \subset U$ tel que $\Delta v > 0$ dans $B(x,r)$. Alors $0 = \phi'(r) = \frac{r}{A(1)} \int_{\partial B(0,1)} \Delta v(x+rz) dz > 0$. \square

Deux conséquences des résultats de valeurs moyennes:

Théorème: Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ harmonique sur \mathbb{R}^d .

a) Si $u \geq 0 \Rightarrow u$ est constante

(Lem de Bôcher ou Picard)

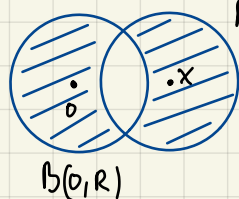
b) Si u est bornée $\Rightarrow u$ est constante

(Lem de Liouville)

Preuve: a) $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall R > 0: u(x) = \frac{1}{V(R)} \int_{B(x,R)} u(y) dy, d'après$

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{V(R)} \int_{B(x,R) \Delta B(0,R)} \tilde{u}(y) dy$$

\bar{a}



$B(x,R)$ i.e. $B(x,R) \Delta B(0,R)$

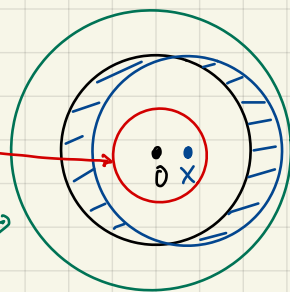
$$= B(x,R) \cup B(0,R) \setminus B(x,R) \cap B(0,R)$$

et $\tilde{u}(y) = \begin{cases} u(y) & \text{si } y \in B(x,R) \setminus B(0,R) \\ -u(y) & \text{si } y \in B(0,R) \setminus B(x,R) \end{cases}$ *diff. signe.*

Note: Si $R > \|x\|$,

$$B(0, R - \|x\|) \subset B(0,R) \cap B(x,R)$$

$$\text{et } B(0,R) \cup B(x,R) \subset B(0, R + \|x\|)$$



$$R > \|x\| \Rightarrow |u(x) - u(0)| \leq \frac{1}{V(R)} \int_{B(0, R + \|x\|) \setminus B(0, R - \|x\|)} |u(y)| dy \stackrel{u \geq 0}{=} \frac{1}{V(R)} \int_{B(0, R + \|x\|)} u(y) dy - \frac{1}{V(R)} \int_{B(0, R - \|x\|)} u(y) dy$$

Caract. des volumes

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{V(R + \|x\|) - V(R - \|x\|)}{V(R)} \cdot u(0) = \frac{(R + \|x\|)^d - (R - \|x\|)^d}{R^d} \cdot u(0) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

i.e. $u(x) = u(0) \forall x \in \mathbb{R}^d$.

b) Soit $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(x)| < \infty \Rightarrow y \mapsto u(y) + M \geq 0$ et est harmonique. Dnc constante par a). \square

Le Théorème de la divergence va nous permettre de résoudre l'éq. de Poisson:

$$\text{Soit } \phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x\| & ; d=2 \\ \frac{1}{d(d-2)V(d)} \frac{1}{\|x\|^{d-2}} & ; d \geq 3 \end{cases} \text{ définie sur } \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

ϕ est la fonction de Green ou solution fondamentale de l'opérateur différentiel Δ sur \mathbb{R}^d .

Propriété: $\forall x \neq 0, \Delta \phi(x) = 0$.

Preuve: Calcul. $\partial_{x_i} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^\alpha} = \left(-\frac{x_i \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\alpha-1}}{\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{2\alpha}} \cdot 2x_i \right) = -2x_i \frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\alpha+1}}$ (i.e. $\nabla \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}} = -2\alpha \frac{x}{\|x\|^{2(\alpha+1)}}$)

$$\partial_{x_i}^2 \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^\alpha} = -2\alpha \left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\alpha+1}} + x_i \cdot \frac{-2(\alpha+1)x_i}{\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\alpha+2}} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}} = \frac{-2d\alpha}{\|x\|^{2(\alpha+1)}} + 4\alpha(\alpha+1) \frac{1}{\|x\|^{2(\alpha+1)}} = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha+1) = d; \text{ i.e. } \alpha = \frac{d}{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}} = \frac{1}{\|x\|^{d-2}}$$

De même si $d=2$. □

Thm: Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ et $u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y) f(y) dy = \phi * f(x), \forall x \in \mathbb{R}^d$.

Alors $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $-\Delta u = f$ dans \mathbb{R}^d

Preuve: (par $d \geq 3$)

a) $u(x) = \int_{\text{supp } f} \phi(x-y) f(y) dy$ by $|u(x)| \leq \|f\|_\infty C(d) \int_{\text{supp } f} \frac{dy}{\|y-x\|^{d-2}} \leq \|f\|_\infty C(d) \cdot A(d) \int_0^R \frac{r^{d-1}}{r^{d-2}} dr < \infty$

supp f - x \subset B(0, R) \text{ si } R < \infty \text{ assez grand}

$$u(x) = \int \phi(y) f(x-y) dy \quad \text{si } f \text{ est unif. continue sur } \mathbb{R}^d \quad (\text{supp } f \text{ compact})$$

$$\Rightarrow u(x+z) - u(x) = \int \phi(y) (f(x+z-y) - f(x-y)) dy \xrightarrow{\|z\| \rightarrow 0} 0 \quad \text{et } u \in C(\mathbb{R}^d). \quad (\text{ds boule de rayon grand})$$

$$\frac{u(x+he_j) - u(x)}{h} = \int \phi(y) \left(\frac{f(x+he_j-y) - f(x-y)}{h} \right) dy$$

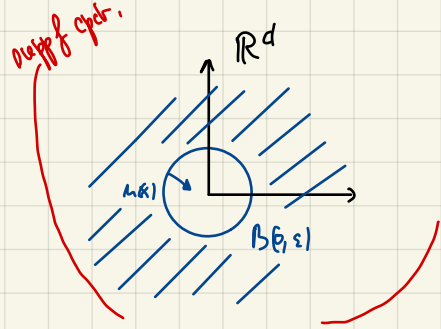
$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int \phi(y) \left[\frac{df(x-y)}{dx_j} \right] e_j dy = \int \phi(y) \partial_{x_j} f(x-y) dy$$

$\in C_c^1(\mathbb{R}^d)$

$\partial_{x_j} f \in C_c^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \partial_{x_j} u(x)$ continue et le même argument montre

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) = \int \phi(y) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x-y) dy \text{ est continue sur } \mathbb{R}^d \Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^d).$$

$$b) \text{ Eniras } \Delta u(x) = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \phi(y) \Delta_x f(x-y) dy}_{:= I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \phi(y) \Delta_x f(x-y) dy}_{:= J_\varepsilon}$$



$$|I_\varepsilon| \leq \|\Delta f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\phi(y)| dy \leq C \varepsilon^2$$

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \phi(y) \Delta_y f(x-y) dy \stackrel{i.p.p.}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla_y \cdot (\phi(y) \nabla_y f(x-y)) dy - \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla_y \phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy$$

f nulle hors d'une boule de grand rayon

$$\stackrel{k. dir.}{=} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \phi(y) \nabla_y f(x-y) \cdot \mu(y) d\sigma(y) - \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla_y \phi \cdot \nabla_y f(x-y) dy := K_\varepsilon + L_\varepsilon$$

$$|K_\varepsilon| \leq \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\phi(y)| |d\sigma(y)| \|\nabla f\|_\infty \leq C \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \cdot \varepsilon^{d-1} = C \varepsilon.$$

$$L_\varepsilon \stackrel{i.p.p.}{=} - \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla_y \cdot (\nabla_y \phi(y) \cdot f(x-y)) dy + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \underbrace{\Delta_y \phi(y)}_{=0} f(x-y) dy$$

$$\stackrel{k. dir.}{=} - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \cdot \nabla_y \phi(y) \cdot \mu(y) d\sigma(y) \quad \text{Note: } \mu(y) = -\frac{y}{\|y\|}; \quad d\sigma(y) = \varepsilon^{d-1} d\sigma\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$$

Avec $\nabla_y \phi(y) = \frac{1}{d(d-2)V(d)} \nabla_y \frac{1}{\|y\|^{d-2}} = \frac{-d-2}{d(d-2)V(d)} \frac{y}{\|y\|^d}$, $\left(\nabla \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}} = -2\alpha \frac{x}{\|x\|^{2(\alpha+1)}}\right)$

$$L_\varepsilon = - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \frac{y}{V(d)d \varepsilon^d} \cdot \frac{y}{\varepsilon} \varepsilon^{d-1} d\sigma\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \frac{1}{V(d)d} d\sigma\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = - f(x) \cdot \underbrace{\frac{A(d)}{V(d)d}}_{=1} + O(\varepsilon).$$

Enfinement: $\Delta u(x) = -f(x) + O(\varepsilon)$ donne le résultat en limite $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\Delta u(x)$ indep. de ε)

Rem: Si $d \geq 3$, $\phi(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} 0$ et on vérifie que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\mu(x)| < \infty$. □

(ni $\text{supp } f \subset B(0, \rho)$; $\|x\| > 2\rho \Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\| \geq \|x\| - \rho \geq \|x\|/2$
 et $\int_{\text{supp } f} \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} f(y) dy \leq C \int_{\text{supp } f} \frac{1}{\|x\|^{d-2}} f(y) dy \leq \tilde{C} \frac{1}{\|x\|^{d-2}}.$)

Si $d=2$, $\phi(x)$ peut diverger à l'infini.

Corollaire: Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ avec $d \geq 3$. Toute solution bornée de $-\Delta u = f$ sur \mathbb{R}^d

est de la forme $u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y) f(y) dy + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante

Preuve: $v := u - \phi * f$ est bornée et satisfait $\Delta v = 0$ sur \mathbb{R}^d . Liouville $\Rightarrow v$ est constante □

Espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$

"Rappels" de L^3 utilisés dans ce qui suit immédiatement.

Soit $p \geq 1$, $L^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurable, tq } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$ ($dx = \text{mesure de Lebesgue}$)

$L^\infty(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurable, tq } \exists K < \infty \text{ avec } |f(x)| \leq K \text{ presque partout} \right\}$.

On définit le norme $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (avec $f \simeq \mathcal{F} \Leftrightarrow f = \mathcal{F}$ p.p.)

$\|f\|_\infty = \inf \left\{ K \text{ tq } |f(x)| \leq K \text{ p.p.} \right\}$.

Les espaces L^p sont complets, i.e. des espaces de Banach, $\forall 1 \leq p \leq \infty$. Riesz-Fischer

Rem: Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, on considère l'extension de f à \mathbb{R}^d par zéro sur Ω^c (qu'on note \tilde{f})

- Si $1 \leq p \leq \infty$ et q tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p, g \in L^q \Rightarrow x \mapsto f(x)g(x) \in L^1$
et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. Hölder

Convolution: Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ à $1 \leq p, q, r \leq \infty$.

Alors p.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ intégrable et $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$ finie.

De plus $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Young

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

Séries de Fourier:

Motivation (Fourier 1822): équation de la chaleur décrivant les flux de chaleur dans la matière.

En termes mathématiques: $u_t = u_{xx}$ à $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$ (matériau annulaire)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x, t) \mapsto (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) e^{-n^2 t}$ est une solution, 2π -périodique

Par linéarité: $u(x, t) = \sum_{n=0}^N (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) e^{-n^2 t}$ est une solution 2π -périodique tq

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^N (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)), \quad \text{à } \underline{N \text{ fini}}.$$

L'intuition de Fourier est que ces expressions restent vraies pour $N = \infty$.

"Toute fonction 2π -périodique est une combinaison linéaire infinie de sinus et cosinus."

Notre objectif de voir dans quel sens cette affirmation est vraie.

Deux points de vue: séries trigonométriques et série L^2 .

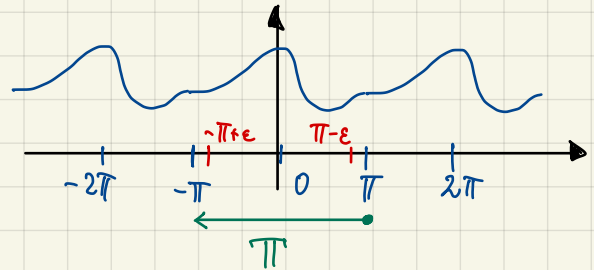
Série trigonométrique: Etude des fonctions du type

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad \text{à } \theta \in \mathbb{T} = (-\pi, \pi], \quad A_n, B_n \in \mathbb{C}, \quad \text{by } \sum_{n=0}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) < \infty. \quad (B_0 = 0)$$

On identifie les fctns 2π -périodiques sur \mathbb{R} et celles définies sur \mathbb{T} , les notions de continuité et différentiabilité de $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ sont celles de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique associée.

E.g., $f \in C(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f$ continue sur $(-\pi, \pi]$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\pi - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(-\pi + \varepsilon)$ ($f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$)

Simplification:
$$\begin{cases} \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$



(ST): $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\theta} \equiv \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} C_n e^{in\theta} \left(= \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{in\theta} \right), \quad C_n \in \mathbb{C}$ sont les coeff. de Fourier.

le lien avec la formule ci-dessus est donné par
$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2} (A_n - i B_n) & \text{si } n > 0 \\ \frac{1}{2} (A_{-n} + i B_{-n}) & \text{si } n < 0 \\ A_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Note:

Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n| < \infty$, i.e. $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1$, on parle de série trigonométrique absolument convergente pour f

$$\overline{f(\theta)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{C_n} e^{-in\theta} \quad \text{i.e. } C_n(\overline{f}) = \overline{C_{-n}(f)}.$$

Théorème:

- Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n| < \infty$, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par (ST) est continue, et donc $f \in L^1(\mathbb{T})$.
- Les coefficients C_n sont donnés par $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$, $\forall n \in \mathbb{Z}$
- Si $g \in L^1(\mathbb{T})$ et ses coefficients sont $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (définis par l'int. ci-dessus) on a la formule de réciprocity de Fourier: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(\theta) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n D_{-n}$.
- En particulier, on a l'identité de Parseval: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^2$.

Remarque: $|D_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(\theta)| d\theta$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $L^1(\mathbb{T}) \ni g \mapsto (D_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty$.

on verra de meilleures estimations plus bas.

Preuve: • les sommes partielles $S_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{ik\theta}$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $|C_k e^{ik\theta}| \leq |C_k|$ montre la convergence uniforme de $S_N(\theta)$ vers $f(\theta)$, donc f est continue.

• La convergence uniforme est vraie pour $f(\theta) \mapsto e^{-im\theta} f(\theta)$, où $m \in \mathbb{Z}$, d'où on peut intégrer terme à terme

$$e^{-im\theta} f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{in\theta} e^{-im\theta}$$

Puisque $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} e^{in\theta} d\theta = \delta_{nm}$, on obtient $C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

← "relation d'orthogonalité dans $L^2(\mathbb{T})$."

• Avec $g \in L^1(\mathbb{T})$, $|S_N(\theta) g(\theta)| \leq \sum_{|k| \leq N} |C_k| |g(\theta)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n| \right) |g(\theta)| \in L^1(\mathbb{T})$,

et par le théorème de conv. dominée de Lebesgue, on peut intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2\pi} \int g(\theta) f(\theta) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} g(\theta) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n D_{-n}$$

$:= D_{-n} 2\pi$

• Avec $g(\theta) = \overline{f(\theta)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{C_n} e^{-in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{C_{-n}} e^{in\theta} \in L^1(\mathbb{T})$, on a déduit Parseval. \square

Exercice: Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n C_n| < \infty$, montrer que (ST) définit une fonction C^1 by $f'(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i n C_n e^{in\theta}$.

Généralisation au cas $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^k C_n| < \infty$, $k \geq 1$.

On obtient en corollaire une représentation de la convolution d'une série trig et d'une fonction intégrable

Corollaire: Soit f une série trig abs. convergente et $g \in L^1(\mathbb{T})$, de coeff. de Fourier C_n et D_n .

$$\frac{1}{2\pi} \int f(\theta) g(\theta - \varphi) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n D_n e^{in\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Preuve: On pose $g_\varphi(\theta) := g(\theta - \varphi)$, dont les coefficients de Fourier sont (considérant g sur \mathbb{R})

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} g_\varphi(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} g(\theta - \varphi) d\theta = \int_{\varphi - \pi}^{\varphi + \pi} e^{-in(\psi - \varphi)} g(\psi) d\psi \stackrel{2\pi\text{-périodicité}}{=} e^{-in\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\psi} g(\psi) d\psi = e^{-in\varphi} D_{-n} 2\pi$$

$\psi = \theta - \varphi$

qui donne par la formule de réciprocity: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(\theta - \varphi) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n D_n e^{in\varphi}$ \square

Rem: La convolution est bien définie pour tout φ , et la série converge uniformément,

$|C_n D_n| \leq |C_n| \frac{1}{2\pi} \int |g(\theta)| d\theta$, donc la convolution est continue en φ .

Propriétés des coeff. de Fourier.

On considère $f \in L^1(\mathbb{T})$ et on pose $\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$ (la transf. de Fourier discrète de f)

On a ou $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^\infty$ définit une application linéaire qui est une contraction :
 $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

Théorème: (Lemme de Riemann-Lebesgue)

$\forall f \in L^1(\mathbb{T})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$, et la convergence est uniforme sur les compacts de $L^1(\mathbb{T})$.

i.e. : $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_0 = \{(n)_{n \in \mathbb{Z}}, \exists \epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$.

Preuve: $2\pi \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \int_{\mathbb{T}} f(\varphi + \frac{\pi}{n}) e^{-in(\varphi + \frac{\pi}{n})} d\varphi = \int_{\mathbb{T}} f(\varphi + \frac{\pi}{n}) e^{-in\varphi} e^{-i\pi} d\varphi = - \int_{\mathbb{T}} f(\varphi + \frac{\pi}{n}) e^{-in\varphi} d\varphi$
 $\theta = \varphi + \frac{\pi}{n}$ $e^{-i\pi} = -1$

Par addition : $4\pi \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} (f(\varphi) - f(\varphi + \frac{\pi}{n})) e^{-in\varphi} d\varphi$.

Si $f \in C(\mathbb{T})$, l'intégrande converge vers zéro unif. en $\varphi \in \mathbb{T}$, \mathbb{T} compact, $\Rightarrow \lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists g$ continue, $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} < \epsilon$. Ainsi, $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \widehat{(f-g)}(n)$.

Mais $\hat{g}(n) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$ et $|\widehat{(f-g)}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f-g\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2\pi}$, $\Rightarrow \limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\hat{f}(n)| \leq \epsilon$, arbitraire.

Enfinement, si $K \subset L^1(\mathbb{T})$ est compact, $\forall \epsilon > 0$, on recouvre K par des boules $K \subset \bigcup_{f \in K} B(f, \epsilon)$.
Compacité $\Rightarrow \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tq $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B(f_i, \epsilon)$. Pour chaque $1 \leq i \leq N_\epsilon$, on applique Riem.-Lebesgue
ni bien qu'il existe N_ϵ tq $|n| \geq N_\epsilon \Rightarrow |\hat{f}_i(n)| < \epsilon$, $\forall 1 \leq i \leq N_\epsilon$. Puis, $\forall g \in K$,
 $g \in B(f_j, \epsilon)$ pour un j , et propriété de contraction, $|\hat{g}(n)| \leq |\hat{f}_j(n)| + \frac{\|g - f_j\|_{L^1}}{2\pi} \leq 2\epsilon$, $\forall |n| \geq N_\epsilon$
si N_ϵ ne dépend que de ϵ et de K .

Remarque: Plus f est régulière, plus ses coeff. de Fourier tendent rapidement vers zéro:

Si $f \in C^1(\mathbb{T})$, $\hat{f}'(n) = in \hat{f}(n)$, $\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (-in) e^{-in\theta} d\theta + 0 \right)$,

et par induction, $f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Un premier résultat de convergence:

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\hat{f} \in \ell^{\infty}$ sa transf. de Fourier discrète. On appelle série de Fourier de f la limite des sommes partielles $S_N(\cdot) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{ik \cdot} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \geq 0$, si elle existe.

La convergence ponctuelle des séries de Fourier est une affaire délicate dans $L^1(\mathbb{T})$, et même dans $C(\mathbb{T})$: il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge sur un ensemble infini dénombrable, et des fonctions intégrables dont la S.F. diverge partout! On sait de plus que si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, alors sa série de Fourier converge presque partout vers f .

Théorème: Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Les sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ convergent en moyenne de Cesaro vers f , dans $L^1(\mathbb{T})$,

$$\text{i.e. } \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(\cdot) - f(\cdot) \right\|_1 = 0.$$

Corollaire: $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^{\infty}$ est injective

$$f \mapsto \hat{f}$$

i.e. Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ satisfaisant $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = g$ p.p.

Rem: On peut donner une preuve directe de ce fait (cf. notes de l'an dernier, au au bas du fichier.)

En effet: si $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, alors $S_n(\theta) \equiv 0 \forall n$ et donc $\|f\|_1 = 0$.

Preuve: On introduit le moyen de Dirichlet $D_n(\theta) := \sum_{|k| \leq n} e^{ik\theta}$, $\theta \in \mathbb{T}$, de classe C^{∞} ,

$$\text{h} : D_n(\theta) = 2n+1, \theta \in \mathbb{T} \setminus \{0\} \Rightarrow D_n(\theta) = D_n(\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \text{ et } \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(\theta) d\theta = 1.$$

↑
série géométrique

$$\text{Hes } F_N(\theta) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{1}{N} \frac{1}{\sin(\theta/2)} \sum_{n=0}^{N-1} \sin e^{i(2n+1)\theta/2} \quad (\text{si } \theta \in \mathbb{T} \setminus \{0\})$$

$$\text{série géométrique } \rightarrow = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right]^2, \text{ h} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_N(\theta) d\theta = 1 \quad (\text{moyen de Fejér})$$

Propriétés: $S_n(\theta) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{i\theta k} = \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-i(\varphi-\theta)k} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+\theta) D_n(\varphi) d\varphi,$

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+\theta) e^{-i\varphi k} d\varphi}_{\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+\theta) e^{-i\varphi k} d\varphi}$$

et $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+\theta) F_N(\varphi) d\varphi.$

Donc $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\varphi+\theta) - f(\theta)) F_N(\varphi) d\varphi.$ Avec $f_\theta(\varphi) := f(\varphi+\theta), n.a$

$$\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f_\theta(\varphi) - f(\theta)) F_N(\varphi) d\varphi \right) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f_\theta - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \underbrace{F_N(\varphi)}_{F_N \geq 0} d\varphi.$$

Lemme: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \|f_\theta - f\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0.$ (classique)

Soit $0 < \delta < \pi$ et écrivons $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{|\varphi| < \delta} + \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{|\varphi| < \delta} \|f_\theta - f\|_{L^1(\mathbb{T})} F_N(\varphi) d\varphi \leq \sup_{|\varphi| < \delta} \|f_\theta - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\varphi) d\varphi}_{=1} \leq \sup_{|\varphi| < \delta} \|f_\theta - f\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

$$\text{et } \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} \|f_\theta - f\|_{L^1(\mathbb{T})} F_N(\varphi) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} 2 \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \frac{1}{N} \frac{1}{|\sin(\varphi/2)|^2} d\varphi \leq \frac{2}{N} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|\sin(\delta/2)|^2}.$$

$\min(N\delta/2)^2 \leq 1$

$\forall \epsilon > 0$, par δ petit, le 1^{er} terme $< \epsilon/2$ et à δ donné, par N assez grand, le 2nd terme $< \epsilon/2$ \square

Remarque: Une modification simple de la preuve (exo!) permet de montrer que

Si $f \in C(\mathbb{T})$, les moyennes de Cesàro $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n$ convergent uniformément vers f , si $N \rightarrow \infty$.

Ce qui montre la "version trigonométrique" du théorème d'approximation de Weierstrass:

Par toute fonction continue périodique f , il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f .

Convergence ponctuelle de la série de Fourier. Il existe plusieurs critères de convergence, plus ou moins sophistiqués. On se cantonnera au cas cas fonctionnel complexe ci-dessous.

Fonctions $C^k(\mathbb{T})$ par morceaux: il s'agit des fonctions $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe une subdivision $0_0 = -\pi < 0_1 < 0_2 < \dots < 0_n = \pi$ de $[-\pi, \pi]$ telle $\forall i=0, 1, \dots, n-1$, $f_i := f|_{]0_i, 0_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^k sur $[0_i, 0_{i+1}]$, (qu'on notera avec f_i).

Théorème de Dirichlet: Soit $f \in C^1(\mathbb{T})$ par morceaux. Alors les sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent ponctuellement en $\vartheta \in \mathbb{T}$ vers $\tilde{f}(\vartheta) = \frac{f(\vartheta+0) + f(\vartheta-0)}{2}$, où $f(\vartheta \pm 0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\vartheta \pm \varepsilon)$.

Rem: Si f est $C^1(\mathbb{T})$ par morceaux et, de plus, continue, alors la convergence est uniforme sur \mathbb{T} . (ce qui absente la continuité de f). On le verra plus bas.

Preuve: $S_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + \vartheta) D_n(\varphi) d\varphi$, puisque $f \in L^1(\mathbb{T})$, où $D_n(\vartheta) = D_n(-\vartheta) = \sum_{|k| \leq n} e^{ik\vartheta}$.

Puis $\int_{-\pi}^0 f(\varphi + \vartheta) D_n(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} f(-\varphi + \vartheta) D_n(\varphi) d\varphi$, suite de D_n .

$\Rightarrow S_n(\vartheta) - \tilde{f}(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(\vartheta + \varphi) + f(\vartheta - \varphi)}{2} - \tilde{f}(\vartheta) \right) D_n(\varphi) d\varphi$, using $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(\varphi) d\varphi = 1$.

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{f(\vartheta + \varphi) - f(\vartheta + 0) + f(\vartheta - \varphi) - f(\vartheta - 0)}{2 \sin(\varphi/2)} \right)}_{:= g_0(\varphi)} \sin((2n+1)\varphi/2) d\varphi$. ← exprimer la $D_n(\varphi)$ for $\varphi \neq 0$.

$:= g_0(\varphi)$, for $\varphi \in]0, \pi[$.

Il suffit de montrer que $g_0 \in L^1([0, \pi])$, puis d'invoquer le lemme de Riemann-Lebesgue pour conclure.

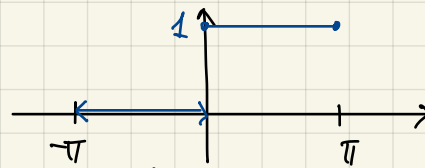
$\sin((2n+1)\varphi/2) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\varphi}}{2}$ et $g_0 := \begin{cases} 0 & \text{sur }]-\pi, 0[\\ g_0 & \text{sur } [0, \pi] \end{cases} \in L^1(\mathbb{T})$

• g_0 est C^0 par morceaux sur $]0, \pi[$ car f et $[\sin(\cdot/2)]^{-1}$ le sont.

• $\frac{f(\vartheta + \varphi) - f(\vartheta + 0)}{2 \sin(\varphi/2)} = \frac{f(\vartheta + \varphi) - f(\vartheta + 0)}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{2 \sin(\varphi/2)} \xrightarrow{\varphi \searrow 0} f'_+(\vartheta)$ où f_{\pm} est l'extension C^1 de f restreinte à $\begin{cases}]0, \vartheta + \delta[\\]\vartheta - \delta, 0[\end{cases}$, resp.

ainsi g_0 est C^0 par morceaux sur $[0, \pi]$, donc dans $L^1([0, \pi])$. □

Application: Soit $f(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vartheta \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } \vartheta \in]-\pi, 0[. \end{cases}$



Then, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-in\vartheta} d\vartheta = \frac{i}{2\pi n} \left((-1)^n - 1 \right)$ si $n \neq 0$ et $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$.

$S_n(\vartheta) = \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{i}{2\pi k} \left((-1)^k - 1 \right) e^{ik\vartheta} = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2j+1} \left(e^{i(2j+1)\vartheta} - e^{-i(2j+1)\vartheta} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2j+1} \sin((2j+1)\vartheta)$

Annotations: "réparer $k > 0$ de $k < 0$ ", "0 si k pair", "-2 si k impair", "si $i \sin((2j+1)\vartheta)$ ".

Dirichlet s'applique et donne pour $\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$.

Théorie L^2 .

Explique le caractère Hilbertien de $L^2(\mathbb{T})$ et $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ ($\int_{-\pi}^{\pi} |f(\vartheta)| d\vartheta \leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(\vartheta)|^2 d\vartheta} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 d\vartheta}$)

la forme $\langle \cdot | \cdot \rangle : L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$
 $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \bar{f}(\vartheta) g(\vartheta) d\vartheta$ est sesquilineaire et induit la norme $\|f\|_2$

(Rappel: $f, g \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow f \cdot g \in L^1(\mathbb{T})$ grâce à Cauchy-Schwarz)

Si $g_N : \vartheta \mapsto \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ik\vartheta}$, $f \in L^2(\mathbb{T})$, on calcule, à l'aide de $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-in\vartheta} e^{im\vartheta} d\vartheta = \delta_{n,m}$

$\langle f - g_N | f - g_N \rangle = \|f\|_2^2 + \|g_N\|_2^2 - \langle f | g_N \rangle - \langle g_N | f \rangle = \|f\|_2^2 + \sum_{|k| \leq N} |c_k|^2 - \bar{c}_n \hat{f}(n) - c_n \overline{\hat{f}(n)}$

i.e. $\|f - g_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{|k| \leq N} |c_k - \hat{f}(k)|^2 - \sum_{|k| \leq N} |\hat{f}(k)|^2$

Il suit alors:

Propriété:

La norme $\|f - g_N\|_2^2$ est minimale pour $c_k = \hat{f}(k)$, $\forall |k| \leq N$, i.e. pour $g_N = S_N$,

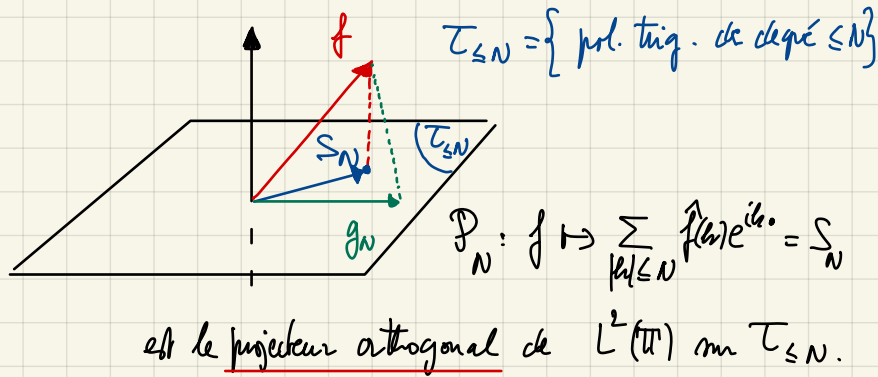
et son minimum est $\|f - S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|k| \leq N} |\hat{f}(k)|^2$.

En particulier: $\sum_{|k| \leq N} |\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$, i.e. $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ si $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Rem: On a $\hat{\cdot} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ et comme on va le voir, $\hat{\cdot}$ est une isométrie.
 $f \mapsto \hat{f}$

Interprétation:

La meilleure approximation de $f \in L^2(\mathbb{T})$ par un polynôme trigonométrique est la somme partielle de sa série de Fourier



Exo: Vérifier que $P_N \circ P_N = P_N$ sur $L^2(\mathbb{T})$ et $\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}), \langle f | P_N g \rangle = \langle P_N f | g \rangle$.

Théorème de Parseval: $\forall f \in L^2(\mathbb{T}), \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$.

Rem: On a vu cette identité pour $f := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$ avec $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, mais tous les $f \in L^2(\mathbb{T})$ n'ont pas cette propriété.

Preuve: Les sommes partielles $(S_n)_{n \geq 1}$ satisfont $\|S_m - S_n\|_2^2 = \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |\hat{f}(k)|^2$ pour $m > n$ et donnent lieu à une suite de Cauchy, par la Proposition. $L^2(\mathbb{T})$ étant complet,

$\exists F \in L^2(\mathbb{T})$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - F\|_2 = 0$. Il reste à voir que $F = f$ p.p.

Calculs

$$2\pi \hat{F}(n) = \int_{\mathbb{T}} (F(\theta) - S_N(\theta)) e^{-in\theta} d\theta + \int_{\mathbb{T}} S_N(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{avec } N > |n| \Rightarrow \text{deuxième terme} = 2\pi \hat{f}(n).$$

Par Cauchy-Schwarz, pour $N > |n|$,

$$|\hat{F}(n) - \hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |F(\theta) - S_N(\theta)|^2 d\theta \right\}^{1/2} \cdot \sqrt{2\pi} = \|F - S_N\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

d'où $\hat{F}(n) = \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ et $F = f$ p.p. par l'inject. de $\hat{\cdot}: f \mapsto \hat{f}$ dans $L^1(\mathbb{T}) \supset L^2(\mathbb{T})$.

Finalement, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \|S_n\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_2^2$, i.e. Parseval. \square

On a donc montré: tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ est limite des sommes partielles de sa série de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$.

Application:

Exemple ci-dessus: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Montrons que l'isométrie $\hat{\cdot} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ est surjective, et donc unitaire.

Théorème de Riesz-Fischer: Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tq $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$.

Alors il existe $f \in L^2(\mathbb{T})$, unique, tq $\hat{f}(n) = c_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Preuve: Soit $T_n(\theta) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik\theta}$. Si $m > n$, $\|T_m - T_n\|^2 = \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |c_k|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$,

i.e. $(T_n)_{n \geq 1}$ est Cauchy dans $L^2(\mathbb{T})$. D'où $\exists f \in L^2(\mathbb{T})$ tq $T_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ dans $L^2(\mathbb{T})$.

Comme dans la preuve de Parseval :

$$2\pi \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} (f(\theta) - T_N(\theta)) e^{-in\theta} d\theta + \int_{\mathbb{T}} T_N(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

$| \cdot | \leq \|f - T_N\|_2 \sqrt{2\pi}$

$$\Rightarrow |\hat{f}(n) - c_n| \leq \|f - T_N\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \text{ i.e. } \hat{f}(n) = c_n \forall n \in \mathbb{Z}.$$

l'unicité provient de l'unicité des coefficients de Fourier dans $L^1(\mathbb{T}) \supset L^2(\mathbb{T})$ \square .

Comme promis, nous arrivons à la convergence ponctuelle de séries de Fourier.

Théorème de convergence uniforme: Si f est $C^1(\mathbb{T})$ par morceaux et $f \in C^0(\mathbb{T})$,

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\|_{\infty} = 0$, i.e. $S_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$, uniformément en $\theta \in \mathbb{T}$.

Preuve: Cas où $f \in C^1(\mathbb{T})$. Le cas C^1 par morceaux et C^0 est une généralisation simple.

Puisque $\hat{f}(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{f}_m(n)$, les sommes partielles satisfont pour $m > n$,

$$|S_m(\theta) - S_n(\theta)| \leq \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |\hat{f}_m(k)| \leq \sum_{|k| \geq n+1} \frac{|\hat{f}_m(k)|}{|k|} \leq \left(\sum_{|k| > n} |\hat{f}_m(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| > n} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}$$

$$\leq c \|f'\|_2 \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ unif. en } \theta.$$

$$\Rightarrow S_n(\theta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{f}(\theta) \in C^0(\mathbb{T}), \text{ uniformément, (à la vitesse } \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Par Dirichlet, et continuité de f , $\tilde{f} = f$. \square

Rappel: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

- $\hat{f}(h) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i h \cdot x} f(x) dx = (\mathcal{F}f)(h)$; $h \in \mathbb{R}^d$ et on transf. de Fourier
- $\check{f}(h) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{+i h \cdot x} f(x) dx = (\mathcal{F}^* f)(h)$; $h \in \mathbb{R}^d$ et on transf. de Fourier inverse.

Rem: $\check{f}(h) = \hat{f}(-h)$ et $\{\hat{f} \mid f \in L^1\} \subset C_0(\mathbb{R}^d)$

← l'esp. vect. des fctns continues
qui tendent vers 0 à l'infini.
Riemann-lesgue

Si f et $x \mapsto x_j f(x) \in L^1$ $j \in \{1, 2, \dots, d\} \Rightarrow \hat{f} \in C^1 \cap C_0$ et $\frac{\partial}{\partial h_j} \hat{f}(h) = \mathcal{F}(x \mapsto -i x_j f(x))(h)$.

Si $f \in C^1 \cap L^1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1 \Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(h) = i h_j \hat{f}(h)$.

Si $f \in L^1$ et $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$, alors $\mathcal{F}(\tau_y f)(h) = e^{i h \cdot y} \hat{f}(h)$.

Si f et $\hat{f} \in L^1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i h \cdot x} \hat{f}(h) dh$, (p.p.t. x.)

Convolution: Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{2}$ où $1 \leq p, q, 2 \leq \infty$.

Alors p.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ intégrable et $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$ finie.

De plus $f * g \in L^2$ et $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Young

Rappel: • Si $f \in L^p$ et $\varphi \in C_c^\infty \Rightarrow f * \varphi(x) \in C^\infty$ et $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$.

• $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

• Si $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$ et $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \cdot (2\pi)^{d/2}$ ← ! facteur

On va étudier la transf. de Fourier sur \mathcal{S} , la classe des fonctions de Schwartz.

Déf:

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \}$ ($x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$)

(C'est un sous-espace vectoriel de C^∞ , où $C_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^p \cap C^\infty$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$.)

$x \mapsto e^{-\langle x, Ax \rangle} \in \mathcal{S}$, si $A \in M_d(\mathbb{R})$ est la matrice une forme quadratique définie positive,

et $x \mapsto P(x) e^{-\langle x, Ax \rangle} \in \mathcal{S}$, si P un polynôme. Mais $x \mapsto e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$.

Remarque: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x \mapsto x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque/exo: On a aussi $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(Preuve: Puisque $\partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g$ car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer

que $x \mapsto x^\alpha f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha f(y) g(x-y) dy$ est unif. bornée sur \mathbb{R}^d , où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$.

¶ i : $|x_i^{\alpha_i}| = |x_i - y_i + y_i|^{\alpha_i} \leq (|x_i - y_i| + |y_i|)^{\alpha_i} = \sum_{\gamma=0}^{\alpha_i} \binom{\alpha_i}{\gamma} |x_i - y_i|^\gamma |y_i|^{\alpha_i - \gamma}$

Ainsi $|x^\alpha f * g(x)|$ bornée par une somme finie de termes de la forme $\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^\alpha |y|^\beta |f(y)| |g(x-y)| dy$

où $|x-y|^\alpha |g(x-y)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |z|^\alpha |g(z)| < \infty$ et $|y|^\beta |f(y)| \in L^1$.

Théorème: $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection (linéaire) et $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

Preuve: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a $x \mapsto \partial^\alpha (x^\beta \varphi(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

et $\mathcal{F}(x \mapsto \partial^\alpha (x^\beta \varphi(x))) (\xi) = (i\xi)^\alpha i^{|\beta|} \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$

donc $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi)| < \infty$.

i) \mathcal{F} surjective: f et $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$.

ii) \mathcal{F} injective: $\mathcal{F}(f) = \hat{f} \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ cf ci-dessus. \square

$\mathcal{S} \subset L^2$ et on munit L^2 de la forme sesquilinéaire définie positive

$\langle \cdot | \cdot \rangle$: $L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tq $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(y)} g(y) dy$.

Note: Hölder avec $p=q=2 \Rightarrow \overline{f} \cdot g \in L^1$ et $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty$.

Propriété immédiate

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire qui induit la norme L^2 et fait de L^2 un esp. de Hilbert.

Théorème de Plancherel restreint au sous-espace $\mathcal{S} \subset L^2$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. En d'autres termes: $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est unitaire.

Preuve: Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit $\tilde{f}: x \mapsto \overline{f(-x)}$. Alors

$$\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} \overline{f(-x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e^{i\xi x} f(-x)} dx = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

Soit $h = f * \tilde{f}$, alors $h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tilde{f}(-y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 dy$. De plus,

$$\widehat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot (2\pi)^{d/2} \text{ et la formule d'inversion donne } h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Finalement $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ et l'identité de polarisation donne $\langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle = \langle f | g \rangle$.

L'adjoint de \mathcal{F} pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ coïncide donc avec $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. \square

$$\left(\text{Polarisation: } \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2 \right) \right)$$

Extension de F à L^2 :

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^d)$$

Soit $f \in L^2$, alors $\exists f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tq $\|f - f_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On définit alors $Ff := \lim_{n \rightarrow \infty} Ff_n$ limite dans L^2 .

Théorème:

F est bien définie sur L^2 et donne lieu à un opérateur unitaire.

Preuve: $\|Ff_n - Ff_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$ montre que $\{Ff_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^2 qui est complet, donc la limite existe. Elle est indépendante de la suite choisie :

$$\text{Si } \tilde{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ également, } \|F\tilde{f}_n - Ff\|_2 \leq \underbrace{\|F\tilde{f}_n - Ff_n\|_2}_{\|f_n - f\|_2} + \underbrace{\|Ff_n - Ff\|_2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - \tilde{f}_n\|_2 + \|\tilde{f}_n - f\|_2$$

F unitaire sur L^2 : $\|Ff\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ff_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$ et on conclut par polarisation. \square

On utilise ici la transf. de Fourier pour résoudre l'éq. de la chaleur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$(EC) \quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times]0, \infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases} \quad \bar{a} \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Commençons par un calcul (formel à ce stade) de transformée de Fourier (en x) de $u(x,t)$.

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} u(x,t) dx = (\mathcal{F} u(\cdot, t))(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\partial_x^2 u(\cdot, t))(k) = -k_i^2 \hat{u}(k,t) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\partial_t u(\cdot, t))(k) = \partial_t \hat{u}(k,t)$$

$$\text{L'éq. de la chaleur donne} \quad \begin{cases} \partial_t \hat{u}(k,t) = -k^2 \hat{u}(k,t) & (k^2 = \sum_i k_i^2) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{g}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad \text{une E.D.O.}$$

La solution de cette E.D.O. est $k \mapsto e^{-tk^2} \hat{g}(k) := \hat{H}_t(k) \hat{g}(k) \cdot (2\pi)^{d/2} \quad \forall t > 0$ fixé

$$\bar{a} \quad \hat{H}_t(k) = \frac{e^{-tk^2}}{(2\pi)^{d/2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad H_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(\cdot))(x) = \frac{e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

calcul

Noyau de la chaleur

Ainsi, avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall t > 0$ fixé on a

$$\hat{H}_t \cdot \hat{g} (2\pi)^{d/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow x \mapsto H_t * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} g(y) dy \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Théorème: $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, soit $u(x,t) := H_t * g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Alors, i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*)$ et u satisfait la 1^{ère} eq. (EC).

ii) $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} g(x)$, unif. en $x \in \mathbb{R}^d$ i.e. $\|u(\cdot, t) - g(\cdot)\|_\infty \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

Posant $u(x,0) := g(x)$, $\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.

iii) $\|u(\cdot, t) - g(\cdot)\|_2 \longrightarrow 0$, si $t \rightarrow 0$.

Preuve: i) On a $u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(k) e^{-tk^2} e^{ikx} dk$ et la décroissance gaussienne justifie la différentiation sous l'intégrale $\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*)$ et satisfait (EC) 1^{ère} eq.

ii) repose sur le lemme ci-dessus

Lemme Propriétés de H_t , $\forall t > 0$, $x \mapsto H_t(x) = \frac{e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} \in \mathbb{R}_*^+$ satisfait :

a) $\int_{\mathbb{R}^d} H_t(x) dx = 1$; b) $\forall \eta > 0$, $\int_{|x| > \eta} H_t(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

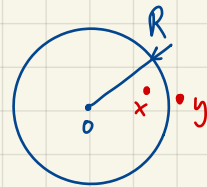
Preuve (du lemme) a) $\int_{\mathbb{R}^d} H_t(x) dx = (2\pi)^{d/2} \hat{H}_t(0) = 1$, car $\hat{H}_t(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-t\xi^2}$.

b) $\int_{|x| > \eta} \frac{e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} dx = \int_{|y| > \eta/\sqrt{4t}} e^{-y^2} \frac{1}{\pi^{d/2}} dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, car $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-y^2} dy < \infty$.
 $y = x/\sqrt{4t}$
 $|dy| = (4t)^{d/2}$

Ainsi, $|(H_t * g)(x) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} H_t(y) (g(x-y) - g(x)) dy \right| \leq \int_{|y| > \eta} H_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy + \int_{|y| \leq \eta} H_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy$.
↖ $H_t(y) > 0$.

• Mais $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ est unif. continue sur \mathbb{R}^d :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tq $|g(x)| < \varepsilon/4$ si $|x| \geq R$,
 $\Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon/2 \quad \forall x, y$ tq $|x| \geq R, |y| \geq R$.



Sur $\overline{B(0, R)}$ compacte, g est continue \Rightarrow unif. continue.

Ainsi, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x, y \in \overline{B(0, R)}$ et $|x-y| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon/4$.

Finalement, si $|x-y| < \eta$ avec $x \in B(0, R)$, $y \in B(0, R)$ ^{continuité} $\Rightarrow \exists z \in \partial B(0, R)$

tq $|x-z| < \eta$, $|y-z| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(z)| + |g(z) - g(y)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon$.

Donc $\int_{|y| \leq \eta} H_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy < \varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}^d} H_t(y) dy \leq \varepsilon$, unif. en x , et

$\int_{|y| > \eta} H_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy \leq 2 \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |g(z)| \int_{|y| > \eta} H_t(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, unif. en x .

iii) $\|u(\cdot, t) - g(\cdot)\|_2 = \|(2\pi)^{d/2} \hat{H}_t(\cdot) \hat{g}(\cdot) - \hat{g}(\cdot)\|_2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\xi)|^2 (1 - e^{-t\xi^2})^2 d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
car: dominée.
ou $\leq (2 + t\xi^2)^2$. □.

On a donc existence d'une solution de (EC) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Remarque: • Le noyau de la chaleur satisfait l'éq. de la chaleur sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+$.

• $u(x,t) := H_t * g(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$ est bien définie si $g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+)$ et vérifie (EC). De plus, on vérifie par des arguments

semblables à ceux développés plus haut que $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ x \in \mathbb{R}^d, t > 0}} u(x,t) = g(x_0)$.

• Si $g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$, alors $u(x,t) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall t > 0$.

(même si $\text{supp } g$ compact.)

itesse de propagation infinie.

• $u = H_t * g$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en t , si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

i.e. $\forall T > 0$, $\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 0 < t < T}} |x^\beta \partial^\alpha u(x,t)| < \infty$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$.

En effet. $u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(\xi) e^{-t\xi^2} e^{i\xi x} d\xi = \mathcal{F}(\xi \mapsto \hat{g}(\xi) e^{-t\xi^2})(x)$

et $x^\beta \partial^\alpha u(x,t) = \mathcal{F}(\xi \mapsto (i\xi)^\alpha (i\xi)^\beta \hat{g}(\xi) e^{-t\xi^2})(x)$

$\|f\|_0 \leq \|f\|_{L^1}$

$\Rightarrow |x^\beta \partial^\alpha u(x,t)| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_\xi^\beta (\xi^\alpha \hat{g}(\xi) e^{-t\xi^2})| d\xi$ la question est la dépendance en t .

Par la formule de Leibniz l'intégrande est une combinaison linéaire de termes du type

$t^\gamma \xi^{|\beta|} e^{-t\xi^2} \frac{d^{\alpha+\beta}}{d\xi^{\alpha+\beta}} \hat{g}(\xi)$ où $0 \leq \gamma \leq |\beta|$, $0 \leq |\alpha| \leq |\alpha|$; $0 \leq |\beta| \leq |\beta| + |\alpha|$.

Avec $e^{-t\xi^2} \leq 1$, $0 < t < T$ et $\hat{g}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on déduit l'existence

d'une constante $C(T, \alpha, \beta)$ tel que $\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 0 < t < T}} |x^\alpha \partial^\beta u(x,t)| \leq C(T, \alpha, \beta)$.

Ceci permet de formuler un résultat d'unicité :

Théorème: Soit $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ by

i) u est continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$

ii) u satisfait (EC) sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+$ avec $u(x, 0) \equiv 0$.

iii) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en t

Alors $u \equiv 0$.

Avec le résultat précédent, on a existence et unicité de la sol. de (EC) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, uniformément en t .

Preuve: On définit l'énergie de la solution au temps t par

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x, t)^2 dx \geq 0 \quad \text{or} \quad E(0) = 0. \quad (\text{cond. initiale})$$

$$E(t) < \infty \quad \text{car} \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \quad \text{De plus} \quad \partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

ce qui justifie la dérivée p.z. à t sous l'intégrale, pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} 2(\partial_t u(x, t)) u(x, t) dx = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_x u(x, t) u(x, t) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\int_{B(0, R)} \nabla_x \cdot (\nabla_x u(x, t) \cdot u(x, t)) dx}_{= \int_{\partial B(0, R)} u(x, t) \nabla_x u(x, t) \cdot \nu(x) d\sigma(x)} - \int_{B(0, R)} \nabla_x u(x, t) \cdot \nabla_x u(x, t) dx \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} -|\nabla_x u(x, t)|^2 dx \leq 0. \quad \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ &\Rightarrow E(t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad u \equiv 0 \quad \square. \end{aligned}$$

Remarque: Cet argument reste vrai si $g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, ce qui montre l'existence et l'unicité de la sol. de (EC)

Lax-Milgram abstrait

Contexte:

Soit H un espace de Hilbert réel et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue

$$\text{i.e. } \exists c > 0 \text{ tq } |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \forall u, v \in H. \quad (\|u\| = (u|u)^{1/2})$$

a est dite coercive s'il existe $\alpha > 0$ tq $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in H.$ ← p.d.f. scal. de H .

Si $L \in H'$, i.e. L est une forme linéaire continue, le thm. de Riesz affirme

$$\exists ! v \in H \text{ tq } L(x) = (v|x), \forall x \in H.$$

Théorème (Lax-Milgram) Soit a une forme bilinéaire sur H , continue et coercive.

$$\text{Alors } \forall L \in H', \exists ! u \in H \text{ tq } L(x) = a(u, x), \forall x \in H.$$

De plus, si a est symétrique, posant $J(x) = \frac{1}{2} a(x, x) - L(x)$ pour $x \in H$,

$$u \text{ est caractérisée par } J(u) = \min_{x \in H} J(x)$$

Preuve: A $x \in H$ fixé, $y \mapsto a(x, y) \in H'$, d'après Riesz il existe un unique

$$\text{vecteur } Tx \in H \text{ tq } a(x, y) = (Tx|y), \forall y \in H.$$

Pour tout $x, y, z \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha Tx + \beta Ty|z) = \alpha (Tx|z) + \beta (Ty|z) = \alpha a(x, z) + \beta a(y, z) = a(\alpha x + \beta y, z),$$

donc par Riesz, $\alpha Tx + \beta Ty = T(\alpha x + \beta y)$ et par continuité de a ,

$$|(Tx|y)| = |a(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|, \forall y \stackrel{y=Tx}{\Rightarrow} \|Tx\| \leq c \|x\|, \text{ i.e. } T \in \mathcal{L}(H).$$

De plus, par coercité, $\|Tx\| \|x\| \geq |(Tx|x)| = a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2, \forall x \in H.$

Montrons qu'alors T est inversible d'inverse continu, i.e. un isomorphisme de H :

i) T injective car $\|Tx\| \geq \alpha \|x\| \Rightarrow T(0) = 0$.

ii) $T(H)^\perp = \{0\}$ (i.e. $T(H)$ est dense) car $\forall z \in T(H)^\perp$,
 $0 = (Tz | z) = a(z, z) \geq \alpha \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$.

iii) $T(H)$ est fermé (donc $H = \overline{T(H)} \oplus T(H)^\perp = T(H)$, i.e. T surjective)

car si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, si $y_n \in T(H)$, alors $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Cauchy

i.e. $\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \alpha \|x_n - x_m\|$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy

donc $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \in H$ et $y_n = Tx_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{T \text{ continue}} Tx \in T(H)$, i.e. $\overline{T(H)} = T(H)$.

iv) T^{-1} est continu car $\|z\| \geq \alpha \|T^{-1}z\|$, $\forall z \in H$.

Soit $L \in H'$; alors par Riesz $\exists! v \in H$ tq $L(x) = (v | x)$.

Avec $u := T^{-1}v$, on a donc $L(x) = (Tu | x) = a(u, x)$, $\forall x \in H$.

Supposons finalement que a est de plus symétrique et $J(x) = \frac{1}{2} a(x, x) - L(x)$ sur H

$\forall v \in H$, on écrit $v = u + w$ et on a

$$J(v) = J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2} a(w, w) + \underbrace{a(u, w)}_{\equiv L(w)} - L(w) = J(u) + \underbrace{\frac{1}{2} a(w, w)}_{\geq \frac{\alpha}{2} \|w\|^2} \geq J(u)$$

Si v est un autre minimum de J , $J(v) = J(u) \Leftrightarrow a(w, w) = 0 \Leftrightarrow w = v - u = 0$.

□

Remarque:

- Si H est de dimension finie, le résultat est élémentaire et ne requiert que $a(u, v) \neq 0 \forall u, v$ plutôt que la coercivité.

← Exercice!

- Et si $\dim H = 1$?

- l'espace de Hilbert H^1

On applique les résultats précédents à l'approche variationnelle des E.D.P. sur un espace fonctionnel Hilbertien

Définition: Dérivée au sens faible

Soit $u: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$), Ω mesuré, tq $u \in L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Alors u possède une dérivée partielle p.z. à x_j au sens faible dans L^p s'il existe $v_j \in L^p(\Omega)$ tq

$$(*) \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\Omega} v_j(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

De même, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable au sens faible dans L^p s'il existe

$$v_1, \dots, v_d \in L^p(\Omega) \text{ tq } (*) \text{ ait lieu pour } j = 1, 2, \dots, d. \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

On dit alors que $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ est le gradient faible de u ← "le" est justifié plus bas.

Remarque: • $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ et $v_j \in L^p_{loc}(\Omega)$ sont suffisant pour que (*) ait un sens,

car supp φ est compact et $\int_{B(0,R)} |u(x)| dx \leq \left(\int_{B(0,R)} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{B(0,R)} 1^q dx \right)^{1/q} < \infty$, $\forall 1 \leq p < \infty$
 et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

• Si $u \in C^1(\Omega)$, alors elle admet $\partial_{x_j} u \in C(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ comme

dérivées partielles au sens faibles dans tout L^p :

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx \stackrel{\text{L.P.P.}}{=} - \int_{\Omega} (\partial_{x_j} u(x)) \varphi(x) dx + \underbrace{\int_{\Omega} \partial_{x_j} (u(x) \varphi(x)) dx}_{\substack{\text{par Fubini et } \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \\ = 0}}$$

Cela justifie les notations (trompeuses) $v_j = \partial_{x_j} u$, et $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \nabla u$.

• Si v_j et $\tilde{v}_j \in L^p(\Omega)$ sont les dérivées faibles de u et $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$, alors $v_j + \tilde{v}_j$ est la dérivée faible de $u + \tilde{u}$ dans L^p . (linéarité)

Exemples: $d=1, \Omega = \mathbb{R}$.

1) $x \mapsto u(x) = e^{-|x|} \in L^p(\mathbb{R}), \forall 1 \leq p < \infty$.



Calcul: $\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{-|x|} dx = \int_{\mathbb{R}^-} \varphi'(x) e^x dx + \int_{\mathbb{R}^+} \varphi'(x) e^{-x} dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

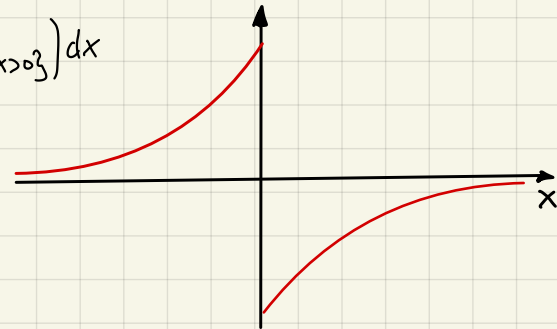
• Si $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^\pm \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^\pm} \varphi'(x) e^{\mp x} dx = - \int_{\mathbb{R}^\pm} \varphi(x) (\mp e^{\mp x}) dx$ lemme de bord nuls.

• Si $\text{supp } \varphi \ni 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) e^x dx + \int_0^{\infty} \varphi'(x) e^{-x} dx &= \left(- \int_{-\infty}^0 \varphi(x) e^x dx + \varphi(0) \cdot 1 \right) + \left(+ \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-x} dx - \varphi(0) \cdot 1 \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(e^x \mathbb{1}_{\{x < 0\}} - e^{-x} \mathbb{1}_{\{x > 0\}} \right) dx \end{aligned}$$

i.e. la dérivée faible de $e^{-|x|}$ est $-\text{sign}(x) e^{-|x|}$

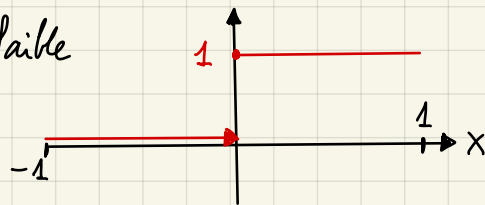
(dans tout L^p)



2) Soit $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ sur $] -1, 1[$ (la fonction de Heaviside)

$u \in L^p(]-1, 1[) \quad \forall 1 \leq p < \infty$ mais sa dérivée faible

n'est dans aucun $L^p(]-1, 1[)$:



$\int_{-1}^1 \varphi'(x) u(x) dx = \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(0)$. La dérivée faible est la distribution de Dirac en zéro.

Propriété: la dérivée faible est unique (dans $L^p(\mathbb{R}^d)$).

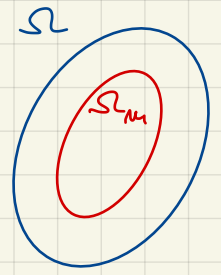
Cela découle du résultat mirant, car $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$:

(Hölder)

Lemme: Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ avec

cf TD $\int_{\Omega} f \varphi dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors $f = 0$ p.p.t $x \in \Omega$.

Preuve: $\forall m \in \mathbb{N}^*$ soit $\Omega_m = \{x \in \Omega \mid x+y \in \Omega \text{ ni } |y| \leq \frac{1}{m}\}$, mesur.

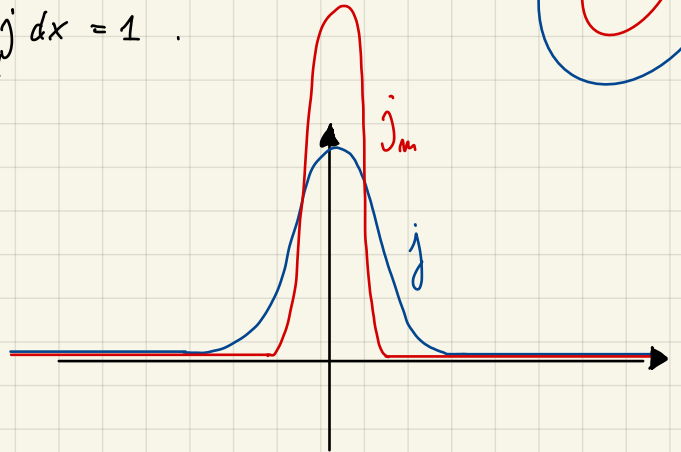


Soit $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ni $\text{supp } j \subset B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} j \, dx = 1$.

On pose $j_m(x) = m^d j(mx)$ et fixe m .

$\forall m \geq n$, avec $\phi(y) := j_m(x-y)$ on

a donc $\int_{\Omega} \phi(y) j_m(x-y) = \int_{\Omega} \phi(x) j_m(x) = 0$



$\forall x \in \Omega_n$, et $\int_{\Omega} \phi(x) j_m(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{L^1_{loc}(\Omega_n)} \int_{\Omega} \phi(x)$

Ainsi $\phi(x) = 0$ ppt $x \in \Omega_n$ et on conclut en prenant $n \rightarrow \infty$. \square

Formule de Leibniz Soient $u \in L^p(\Omega)$ admettant le gradient faible ∇u dans L^p et $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors le gradient faible de $\eta u \in L^p(\Omega)$ est $\eta \nabla u + \nabla \eta u \in L^p(\Omega)$

Preuve: Alors, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int \nabla \phi(x) \eta(x) u(x) \, dx &= \int \underbrace{\nabla(\phi(x) \eta(x))}_{\in C_c^\infty(\Omega)} u(x) \, dx - \int \phi(x) \nabla \eta(x) u(x) \, dx \\ &= - \int \phi(x) (\eta(x) \nabla u(x) + \nabla \eta(x) u(x)) \, dx \end{aligned}$$

Enfin $\eta \nabla u + \nabla \eta u \in L^p(\Omega)$ car $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. \square

Propriété: Si Ω connexe et ∇u faible dans $L^p(\Omega)$ et nul, u est constante dans Ω .

Preuve (en dim 1): Soit $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ ni $\int_{\Omega} \eta(x) \, dx = 1$. $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi(x) = A \eta(x) + \psi'(x)$ où

$A = \int_{\Omega} \phi(x) \, dx$ et $x \mapsto \psi(x) = \int_a^x (\phi(t) - A \eta(t)) \, dt \in C_c^\infty(\Omega)$, $a = \inf\{x \mid x \in \Omega\}$. Alors, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) \, dx = A \int_{\Omega} u(x) \eta(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x) \psi'(x) \, dx = \int_{\Omega} \phi(x) \, dx \cdot C, \text{ i.e. } \int_{\Omega} (u(x) - C) \phi(x) \, dx = 0 \Rightarrow u(x) = C$$

Rem: $\int_{\Omega} u(x) \eta(x) \, dx = \int_{\Omega} C \eta(x) \, dx = C \int_{\Omega} \eta(x) \, dx$. i.e. C ne dépend que de $\int_{\Omega} \eta(x) \, dx$. \square

Définition: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $W^{1,2}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega), i=1,2,\dots,d\}$,
 où les dérivées sont faibles dans L^2 . (C'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} (\mathbb{C})).

$\forall u \in W^{1,2}$ on pose $\|u\|_{W^{1,2}} = \left\{ \|u\|_{L^2}^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} u\|_{L^2}^2}_{:= \|\nabla u\|_{L^2}^2} \right\}^{1/2}$. (C'est une norme.)

Propriété: $W^{1,2}$ muni de $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ est un espace de Hilbert
 de pdt. scalaire $\langle u | v \rangle = \int_{\Omega} (\bar{u}(x)v(x) + \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla v(x)) dx$

Preuve: i) $\|u\|_{W^{1,2}}^2 = \langle u | u \rangle$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire. ✓

ii) Si $\{u_n\}$ Cauchy dans $W^{1,2}$ $\stackrel{L^2 \text{ complet}}{\Rightarrow} u_n \xrightarrow{L^2} u$ et $\partial_{x_j} u_n \xrightarrow{L^2} v_j$ $j=1,2,\dots,d$

on $\int_{\Omega} \partial_{x_j} \varphi(x) u_n(x) dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) \partial_{x_j} u_n(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

iii) $v_j = \partial_{x_j} u$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{x_j} \varphi(x) u(x) dx &= \int_{\Omega} \partial_{x_j} \varphi(x) u_n(x) dx + \int_{\Omega} \partial_{x_j} \varphi(x) (u(x) - u_n(x)) dx \\ &= - \int_{\Omega} \varphi(x) \underbrace{\partial_{x_j} u_n(x)}_{v_j(x) + (\partial_{x_j} u_n - v_j)(x)} dx + O(\|u - u_n\|_2) = - \int_{\Omega} \varphi(x) v_j(x) dx + O(\|u - u_n\|_2 + \|\partial_{x_j} u_n - v_j\|_2) \end{aligned}$$

↙ nomenclature. et $n \rightarrow \infty \quad \square$.

Densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d) := W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$

1) Soit $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} j(x) dx = 1$ et $j_n(x) = n^d j(x \cdot n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Si $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow u_n = j_n * u$ et $v_n = j_n * \nabla u$ (à val. dans \mathbb{R}^d)

ont C^∞ et convergent dans L^2 vers u et ∇u . De plus, $v_n = \nabla u_n$, car

$\nabla(j_n * u) = (\nabla j_n * u) = (j_n * \nabla u)$. La seconde égalité est justifiée par la def de ∇u :

$$\int (\partial_{x_j} j_n(x-y)) u(y) dy = - \int (\partial_{y_j} \underbrace{j_n(x-y)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}) u(y) dy = \int j_n(x-y) \partial_{y_j} u(y) dy$$

Ainsi, $\|u_n - u\|_{H^1}^2 = \|u_n - u\|_2^2 + \|\nabla u_n - \nabla u\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ Thm: $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = H^1(\mathbb{R}^d)$

Rem: Ce résultat de densité reste vrai sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: $\overline{C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = H^1(\Omega)$.

2) Soit $\eta: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\eta(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\eta(x) \leq 1 \forall x$.

On pose $\eta_n(x) = \eta(x/n)$

$C_c(\mathbb{R}^d)$



Par leibniz, $\eta_n u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap \{\text{à support compact}\}$. De plus:

$$\|u - \eta_n u\|_2^2 \leq \int_{|x| \geq n} |u(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car } u \in L^2, \text{ et}$$

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} |\nabla \eta(z)| \leq C$$

$$\|\nabla u - \nabla(\eta_n u)\|_2^2 = \int |\nabla u(x)(1 - \eta_n(x)) - \underbrace{\frac{1}{n} \nabla \eta(x/n)}_{\text{bounded}} u(x)|^2 dx$$

$$|a + b|^2 \stackrel{c.s.}{\leq} |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$$

$$\leq 2 \int_{|x| \geq n} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{C}{n^2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

C-à-d: $\eta_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1} u$.

3) Finalement, $\omega_n := \eta_n u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\nabla \omega_n = (\nabla \eta_n) u_n + \eta_n \nabla u_n$

on vérifie que $\|\omega_n - u\|_{H^1} \leq \underbrace{\|\eta_n(u_n - u)\|_{H^1}}_{\leq 1} + \underbrace{\|(\eta_n u - u)\|_{H^1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ par 2)}}$ et

$$\|\eta_n(u_n - u)\|_2^2 = \int |\eta_n(x)|^2 |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leq \|u_n - u\|_2^2 \rightarrow 0$$

$\rightarrow 0$ comme ci-dessus.

$$\|\nabla \eta_n(u_n - u) + \eta_n \nabla(u_n - u)\|_2 \leq \underbrace{\|\nabla \eta_n(u_n - u)\|_2}_{\frac{1}{n} \nabla \eta(\frac{\cdot}{n}) = O(\frac{1}{n})} + \|\eta_n \nabla(u_n - u)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On a montré le

□

Théorème: $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = H^1(\mathbb{R}^d)$.

Remarque: Ce résultat est faux en général sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}} := H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

Solution faible de l'éq. de transport:

$$\begin{cases} (T) & \partial_t u(x,t) + b \cdot \nabla_x u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} \quad \bar{a} \cdot b \in \mathbb{R}^d \\ (CI) & u(x,0) = g(x) \in C^1(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

On a on $u(x,t) = g(x - bt) \in C^1(\mathbb{R}^{d+1})$ est une solution classique de l'EDP.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ quelconque, et $u(x,t)$ une solution classique.

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,t) (\partial_t u(x,t) + b \cdot \nabla_x u(x,t)) dx dt \quad \text{Hund dir} \rightsquigarrow 0, \text{ car supp } \varphi(\cdot, t) \text{ compact } \forall t.$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) u(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(x,t) u(x,t) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{div}_x (\varphi(x,t) b u(x,t)) - \nabla_x \varphi(x,t) \cdot b u(x,t)) dx dt$$

$$\text{i.e. (F)} \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(x,t) + \nabla_x \varphi(x,t) \cdot b) u(x,t) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) u(x,0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$$

On élargit l'ensemble des solutions de (T).

Définition: Toute fonction $u \in L^p(\mathbb{R}^{d+1})$, $1 \leq p < \infty$, admettant un gradient faible L^p avec $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant (F) est une solution faible de l'éq. de transport.

Propriété: Si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, admet un gradient faible dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,
 $u(x,t) := g(x - bt)$ est une solution faible dans $L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ de (T):

Preuve: Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$.

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(x,t) g(x-bt) + b \cdot \nabla_x \varphi(x,t) g(x-bt)) dx dt \quad \begin{array}{l} \bar{a} \text{ fixé:} \\ \leftarrow y = x - bt \end{array}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\partial_t \varphi(y+bt, t)}_{\frac{d}{dt} \varphi(y+bt, t) - \nabla_x \varphi(y+bt, t) \cdot b} g(y) + b \cdot \nabla_x \varphi(y+bt, t) g(y) dy \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \frac{d}{dt} \varphi(y+bt, t) dt \right) g(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y,0) g(y) dy \quad \square.$$

$\varphi(y+bt, t) \Big|_{t=\infty} = 0.$

Unité des solutions faibles.

Supposons que $u \in L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ et $v \in L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ sont

deux solutions de (F), satisfaisant $u(x,0) = v(x,0) \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $u = v$ p.p.t. (x,t) .

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(x,t) + \nabla_x \varphi(x,t) \cdot b) u(x,t) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) u(x,0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$$

On a: $w := u - v \in L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ satisfait $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(x,t) + \nabla_x \varphi(x,t) \cdot b) w(x,t) dx dt = 0.$$

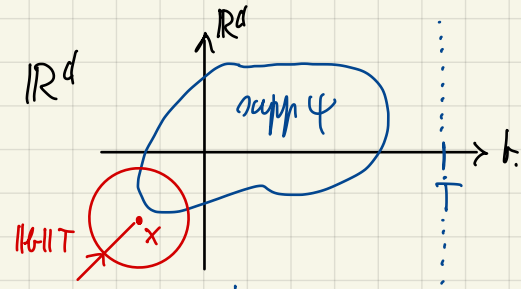
Si $\varphi(x,t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ est solution de $\partial_t \varphi(x,t) + \nabla_x \varphi(x,t) \cdot b = \psi(x,t)$, et

$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times]0, \infty[)$ est quelconque, on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,t) w(x,t) dx dt = 0, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times]0, \infty[) \Rightarrow w(x,t) = 0 \text{ p.p.t. } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty).$$

On vérifie que pour $T > 0$ on a $(x,T) \in \text{supp } \psi^c \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi(x,t) := \int_T^t \Psi(x - b(t-s), s) ds \in C^\infty(\mathbb{R}^d, [0, \infty[)$$



$$\text{satisfait } \begin{cases} \partial_t \varphi(x,t) + b \cdot \nabla_x \varphi(x,t) = \Psi(x,t), \\ \nabla_x \varphi(x,t) = \int_T^t b \cdot \nabla_x \Psi(x - b(t-s), s) ds \end{cases}$$

De plus, $\varphi(x,T) = 0$ et $\forall \tau > T, \varphi(x,\tau) = 0, \Leftarrow \Psi(y,\tau) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$.

et $x - b(t-s) \in B(x, \|b\|T), \quad \forall s \in [t, T], \quad 0 \leq t \leq T$

assure que $\varphi(x,t) = 0 \quad \forall x$ tel que $\text{dist}(x, \text{supp } \Psi) > \|b\|T$, i.e. $\text{supp } \varphi$ compact. \square .

Solutions dans H^1 : considérons $-\Delta u + u = f$ sur \mathbb{R}^d où $f \in C(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$

Si $u \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une solution (classique) de cette EDP, et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ on a

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} (-\varphi(x) \Delta u(x) + \varphi(x) u(x) - \varphi(x) f(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (-\nabla(\varphi(x) \nabla u(x)) + \nabla(\varphi(x) \nabla u(x)) + \varphi(x)(u(x) - f(x))) dx$$

$$\text{i.e. : } \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla(\varphi(x) \nabla u(x)) + \varphi(x)(u(x) - f(x))) dx = 0$$

lim div.
supp φ compact

Remarques:

- Ne requiert que $\nabla u(x) \in C^0(\mathbb{R}^d)$.
- $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ suffisant
- Si $u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ i.e. $u \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$
alors $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ + condition d'intégrabilité est suffisant.

Cela conduit, dans le cas où $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, à étendre la notion de solution de

(1) $-\Delta u + u = f$ sur \mathbb{R}^d à l'ensemble des fonctions $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$(2) \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla v(x) \nabla u(x) + v(x) u(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) f(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

C'est la formulation variationnelle de l'EDP (1). Voir le plan ci-dessus.

Par le calcul ci-dessus, si $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ est une solution classique, éventuellement
by $u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ (condition à l'infini) elle satisfait (2) $\forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Rem: Si on est capable de montrer, peut-être à l'aide de conditions à l'infini, que
 $u \in C^2(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$, alors (2) sera vraie $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ par densité $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$

On dit que $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ est une solution faible de (1) si elle satisfait (2).

Théorème: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $-\Delta u + u = f$ sur \mathbb{R}^d admet une unique

solution au sens faible $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tq

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla v(x) \nabla u(x) + v(x) u(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) f(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

caractérisé par $u = \min_{v \in H^1(\mathbb{R}^d)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla v(x)|^2 + v^2(x)) dx - \int_{\mathbb{R}^d} v(x) f(x) dx \right\}$

Preuve: Les fonctions sont vraies à valeurs réelles, H^1 est un \mathbb{R} esp. de Hilbert.

Soit $a: H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $L_f: H^1 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(v, u) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla v(x) \nabla u(x) + v(x) u(x)) dx$ et $v \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) v(x) dx$.

• $a = \langle \cdot | \cdot \rangle_{H^1}$, le pbt scal. sur H^1 , donc, trivialement c.s.
 a est bilinéaire, symétrique, continue ($|a(u, v)| = |\langle u | v \rangle_{H^1}| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$)
 et coercive ($a(u, u) = \|u\|_{H^1}^2$).

• L est continue: $|L(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) \cdot v(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$.

Par Lax-Milgram: $\exists ! u \in H^1$ tq $a(u, v) = L_f(v) \quad \forall v \in H^1$; $u = \min_{v \in H^1} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - L_f(v) \right\}$.

Remarque: □.

Si l'on considère $-\Delta u = f$ (l'éq. de Poisson), la forme quadratique associée

$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$ est définie positive, mais n'est pas coercive sur $H^1(\mathbb{R}^d)$:

(Sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$, grâce à l'inégalité de Poincaré.)

$d=1$, $g_\sigma(x) = e^{-\sigma x^2}$, $g'_\sigma(x) = -2\sigma x e^{-\sigma x^2}$, $\sigma > 0$

$$\Rightarrow a(g_\sigma, g_\sigma) = 4\sigma^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\sigma x^2} dx = 4\sigma^2 \int_{\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}} z^2 e^{-2z^2} \frac{dz}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{\sigma} 4 \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-2z^2} dz$$

$$\|g_\sigma\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma x^2} (1 + 4\sigma^2 x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2z^2} dz + \sqrt{\sigma} 4 \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-2z^2} dz.$$

$$\text{et } 0 < \alpha \leq \frac{a(g_\sigma, g_\sigma)}{\|g_\sigma\|_{H^1}^2} = \frac{\sigma I_2}{I_0 + \sigma I_2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \text{⚡}$$

Généralisation: Soit $E = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j}) - a_0(x)$, un opérateur différentiel

où $a_{ij} = a_{ji} \in C^1_{\neq}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et $\exists \beta > 0$ avec $\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \beta |\xi|^2$, $\forall \xi, x \in \mathbb{R}^d$,
ellipticité

et $a_0 \in C^0_{\neq}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et $\exists \beta_0 > 0$ avec $a_0(x) \geq \beta_0 \forall x \in \mathbb{R}^d$.

On pose $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$ la matrice définie positive des coeff. de E .

Théorème: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $\exists ! u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ solution faible réelle de l'EDP

$$-Eu = f \quad (\text{i.e.} \quad -\sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u - \sum_{i,j} (\partial_{x_i} a_{ij}(x)) \partial_{x_j} u + a_0(x) u = f)$$

telle que
$$\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla v(x) \cdot A(x) \nabla u(x) + a_0(x) v(x) u(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) f(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^d)$$

De plus,
$$u = \min_{v \in H^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot A \nabla v + a_0 v^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} f v dx \right\}$$

Preuve: il suffit de vérifier que $a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \cdot A \nabla v + a_0 uv) dx$ satisfait les

hypothèses de Lax-Nilgram dans H^1 , ainsi que $L(v) = \int_{\mathbb{R}^d} f v(x) dx$.

o) $a(u,v) = a(v,u)$ car $A(x) = A^T(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, et a est clairement bilinéaire.

i) Continuité: $\exists \bar{A} < \infty, \bar{a}_0 < \infty$ et

$$\|A(x)\|_{L(\mathbb{R}^d)} \leq C(d) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{i,j} |a_{ij}(x)| \leq \bar{A} \quad \text{car } A \in C^1_{\neq}(\mathbb{R}^d, M(\mathbb{R}^d)).$$

$$|a_0(x)| \leq \bar{a}_0 \quad \text{car } a_0 \in C^0_{\neq}(\mathbb{R}^d). \quad \text{Par Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^d \text{ puis } L^2$$

$$|a(u,v)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{A} |\nabla u(x)| |\nabla v(x)| + \bar{a}_0 |u(x)| |v(x)|) dx$$

$$\leq C \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq C' \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

ii) Coercité:

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^d} a_0(x) u(x)^2 dx > \beta_0 \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx$$

$$\bullet \nabla u(x) \cdot A(x) \nabla u(x) \geq \beta |\nabla u(x)|^2 \quad \text{grâce à l'hyp. d'ellipticité}$$

$$\Rightarrow a(u, u) \geq \int_{\mathbb{R}^d} (\beta |\nabla u(x)|^2 + \beta_0 |u(x)|^2) dx \geq \underbrace{\min(\beta, \beta_0)}_{> 0} \|u\|_{H^1}^2$$

iii) $|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$, donc $L : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. \square .

Remarque: • Si $f \equiv 0$, la solution est $u(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$.

• Peu de chances de trouver des solutions par des méthodes alternatives si A , a_0 dépendent effectivement de x .

• Il est parfois possible de montrer que la solution faible de certains problèmes elliptiques est en fait plus régulière que H^1 , voire classique, ou C^∞ .

Cela nécessite des outils développés dans la théorie des espaces de Sobolev.